ਥੀਓਰਮ ਅਗਰ ਇਕ ਓਪਣ ਇੰਟਰਵਲ ਉੱਤੇ ਇਕ ਰਿਅਲ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨ ਐਸੀ ਹੈ ਕੀ ਓਹਦੀ ਖੱਬੀ ਤੇ ਸੱਜੀ ਲਿਮਿਟ ਹਰ ਪੋਇੰਟ ਓੱਤੇ ਐਗਜ਼ਿਸਟ ਕਰਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਇਕ ਕਾਉਂਟੇਬਲ ਸਬਸੈਟ ਨੂੰ ਛੱਡ ਕੇ ਇਹ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨ ਬਾਕੀ ਸੱਭ ਪੋਇਟਾਂ ਉੱਤੇ ਕੰਟੀਨੁਅਸ ਹੋਵੇਗੀ।

ਪਰੂਫ਼ ਇੰਟਰਵਲ U ਦੇ ਓਹ ਸਾਰੇ ਪੋਇੰਟ x ਜਿੱਥੇ ਅੱਪਣੀ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨ f ਦੀ ਕੀਮਤ f(x) ਅਤੇ ਖੱਬੀ ਲਿਮਿਟ $f_-(x)$ ਵਿੱਚ 1/n ਤੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਦਾ ਅੰਤਰ ਹੈ ਇਸ ਸਬਸੈਟ ਨੂੰ ਆਪਾਂ A_n ਆਖਾਂਗੇ। ਨੋਟ ਕਰੋ ਕੀ ਐਸੇ x ਦੇ ਖੱਬੇ ਨੂੰ ਅਤੇ ਕੋਲ ਤੋਂ ਕੋਲ U ਦਾ ਇਕ ਪੋਇੰਟ x' ਮੋਜੂਦ ਹੈ ਸੱਚ ਦੈਟ f(x') ਅਤੇ f(x) ਵਿੱਚ ਅੰਤਰ 1/n ਤੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਹੈ। ਅਗਰ ਸਬਸੈਟ A_n ਐਸਾ ਹੈ ਕਿ ਇਸ ਦੇ ਹਰ ਇਕ ਪੋਇੰਟ x ਦੇ ਖੱਬੇ ਨੂੰ ਕੁਝ ਦੂਰੀ ਤੱਕ ਇੱਸੇ ਸਬਸੈਟ ਦਾ ਕੋਈ ਹੋਰ ਪੋਇੰਟ ਨਹੀਂ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਦੂਰੀ ਵਿੱਚ U ਦਾ ਇਕ ਡਿਸਟਿੰਕਟ ਰੈਸ਼ਨਲ ਨੰਮਬਰ r(x) ਹੋਵੇਗਾ ਜੋ ਸਿੱਧ ਕਰਦਾ ਹੈ ਕਿ A_n ਕਾਉਂਟੇਬਲ ਹੈ। ਦੂਜੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕਿ A_n ਵਿੱਚ ਇਕ ਐਸਾ ਪੋਇੰਟ x_0 ਵੀ ਹੈ ਜਿਹਦੇ ਖੱਬੇ ਨੂੰ ਐਸੀ ਕੋਈ ਦੂਰੀ ਨਹੀਂ ਨਾਮੁਮਕਿਣ ਹੈ। ਇਹ ਇਸ ਲਈ ਕਿ ਤਾਂ x_0 ਦੇ ਖੱਬੇ ਨੂੰ ਅਤੇ ਨੇੜੇ ਤੋਂ ਨੇੜੇ U ਦੇ ਐਸੇ ਦੋ ਪੋਇੰਟ x' ਅਤੇ x ਹੋਣਗੇ ਜਿਹਨਾਂ ਉੱਤੇ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨ f ਦਿਆਂ ਕੀਮਤਾਂ ਵਿਚ ਅੰਤਰ 1/n ਤੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਹੈ। ਪਰ ਆਹ ਤਾਂ ਹੋ ਹੀ ਨਹੀਂ ਸਕਦਾ ਕਿਉਂਕਿ ਪੋਇੰਟ x_0 ਉੱਤੇ ਵੀ ਤਾਂ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨ f ਦੀ ਖੱਬੀ ਲਿਮਿਟ $f_-(x_0)$ ਐਗਜ਼ਿਸਟ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਬਿਲਕੁਲ ਇਸੇ ਤਰਹਾਂ ਓਹ ਸਬਸੈਟ B_n ਜਿੱਥੇ f(x) ਅਤੇ ਸੱਜੀ ਲਿਮਿਟ $f_+(x)$ ਵਿਚ ਅੰਤਰ 1/n ਤੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਹੈ ਇਕ ਕਾਉਂਟੇਬਲ ਸੈਟ ਹੈ । ਏਹ ਸਾਰੇ ਸੈਟਸ A_n ਅਤੇ B_n , n = 1, 2, ... , ਦਾ ਯੂਨੀਅਣ ਆਪਾਂ ਨੂੰ ਦਿੰਦਾ ਹੈ ਓਹ ਸਬਸੈਟ ਜਿਸ ਉੱਤੇ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨ ਕੰਟੀਨੁਅਸ ਨਹੀਂ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਸੈਟ ਵੀ ਕਾਉਂਟੇਬਲ ਹੈ ਜੋ ਆਪਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰਣਾ ਸੀ।

ਨੋਟ

(੧) ਰਿਅਲ ਐਨੈਲੇਸਿਸ ਦੇ ਸ਼ੁਰੂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਹੀ ਆਪਾਂ ਸਿਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਕ ਵੱਧਦੀ ਯਾਂ ਘੱਟਦੀ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨ ਦੀਆਂ ਖੱਬੀਆਂ ਅਤੇ ਸੱਜੀਆਂ ਲਿਮਿਟਸ ਹਰ ਪੋਇੰਟ ਉੱਤੇ ਐਗਜ਼ਿਸਟ ਕਰਦੀਆਂ ਹਨ ਪਰ ਇਸ ਕੇਸ ਵਿਚ ਤਾਂ ਇਹ ਬਹੁਤ ਹੀ ਸਰਲ ਹੈ ਕਿ ਡਿਸਕੰਟੀਨੀਉਟੀਜ਼ ਕਾਉਂਟੇਬਲ ਹਨ।

(੨) ਸ਼ਾਇਦ ਐਸੇ ਹੀ ਕੋਰਸ ਦੋਰਾਨ ਸਫ਼ਰੀਯਾਨ ਅਤੇ ਅਸਲਨਯਾਨ ਨੂੰ ਇਹ ਅਮਰੀਕਣ ਮੈਥ ਮੰਥੱਲੀ ਅਪਰੈਲ ੨੦੧੫ ਦਾ ਸਵਾਲ ਨੰਬਰ ੧੧੮੩੩ ਸੂਝਿਆ ਹੋਵੇ : ਕੀ ਇਹ ਸੈਟ ਅਨਕਾਉਂਟੇਬਲ ਵੀ ਹੋ ਸਕਦੈ ਜਦੋਂ ਆਪਾਂ ਨੂੰ ਸਿਰਫ਼ ਲਿਮਿਟਜ਼ ਦੀ ਐਗਜ਼ਿਸਟੈਂਸ ਹੀ ਦਿੱਤੀ ਹੈ ?

(੩) ਥੀਓਰਮ ਦੱਸਦੀ ਹੈ ਕਿ ਓਹਨਾਂ ਦੇ ਸਵਾਲ ਦਾ ਜਵਾਬ ਹੈ "ਨਹੀਂ"। ਇਹ ਵੀ ਗ਼ੋਰ ਤਲਬ ਕਿਤਾ ਜਾਏ ਕਿ ਥੀਓਰਮ ਅਤੇ ਪਰੂਫ਼ ਓਦੋਂ ਵੀ ਸਹੀ ਹਨ ਜਦੋਂ ਓਪਣ ਇੰਟਰਵਲ U ਉੱਤੇ ਡੀਫ਼ਾਇਨਡ f ਆਪਣੀਆਂ ਕੀਮਤਾਂ ਰੀਅਲ ਲਾਇਨ ਦੀ ਥਾਂ ਕਿਸੇ ਵੀ ਮੀਟਰਿਕ ਸਪੇਸ ਵਿਚ ਲੈਂਦੀ ਹੈ।

ਕੇ ਐਸ ਸਰਕਾਰੀਆ

੧੯ ਮਈ ੨੦੧੫