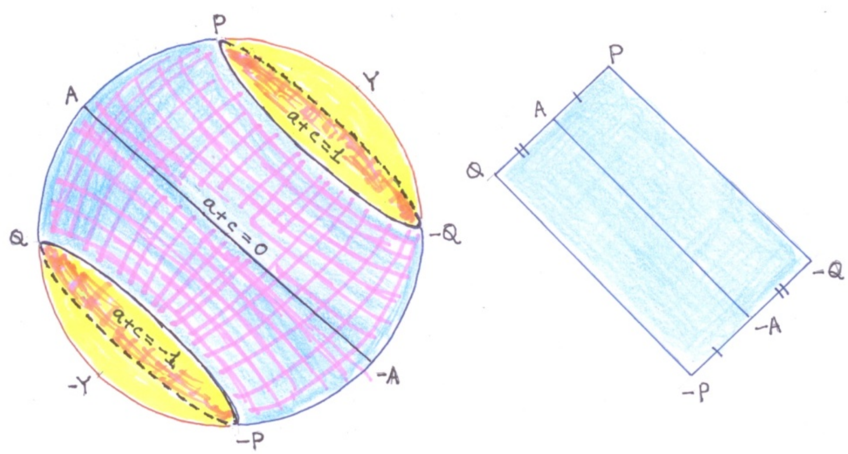
ਬੀਜ ਗਣਿਤ ਦਾ ਮੂਲ ਮਸਲਾ

ਥੀਓਰਮ : ਓਹ ਸਭ ਇਕੂਏਸ਼ਨਾਂ ਜਿਹੜੀਆਂ ਆਪਾਂ ਸਕੂਲੇ ਕਵਾਡਰੇਟਿਕ ਫੌਰਮੂਲੇ ਨਾਲ ਹਲ ਕਰਦੇ ਸਾਂ ਬਣਾਂਦੀਆਂ ਹਨ ਮੋਬੀਅਸ ਸਟਰਿਪ !

ਪਰੂਫ : ਕੱਮਪਲੈਕਸ ਨੰਬਰ ਸਕੂਲੇ ਨਹੀਂ ਸਨ ਪਰ ਆਪਾਂ ਸਿੱਖ ਲਿੱਤਾ ਸੀ ਕਿ ਕਦੋਂ ਤੇ ਕਿਸ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਡਿਗਰੀ ਦੋ ਦੀ ਇਕੂਏਸ਼ਨ $ax^2 + bx + c = 0$ ਨੂੰ ਹਲ ਕਰਣਾ ਹੈ : ਮਾਰੋ ਗੁਣਾ 4a ਨਾਲ ਅੱਤੇ ਕਰੋ 'ਵਰਗ ਪੂਰਤੀ' ਟੂ ਗੈਟ $(2ax + b)^2 - (b^2 - 4ac) = 0$ ਜਿਹਦੇ ਫੇਕਟਰ ਓਦੋਂ ਤੇ ਸਿਰਫ ਓਦੋਂ ਹੀ ਮੁਨਾਸਿਬ ਹਨ ਜੇ $b^2 - 4ac \geq 0$ ਸਹੀ ਹੈ। ਹੋਰ ਅੱਗੇ ਦੋਆਂ ਰੂਟਾਂ ਦਾ ਰੱਟਾ ਵੀ ਲੱਗਾ ਲਿੱਤਾ ਸੀ : ਕਵਾਡਰੇਟਿਕ ਫੋਰਮੂਲਾ ! ਹੋਮੋਜੀਨੱਸ ਡਿਗਰੀ ਦੋ ਦਿਆਂ ਇਕੂਏਸ਼ਨਾਂ $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$ ਵੀ ਕੁਝ ਚਿਰ ਲਈ ਆਈਆਂ ਸਨ ਅੱਤੇ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਵੀ ਉਸੇ ਵਿਧੀ ਯਾਂ ਫੋਰਮੂਲੇ ਨਾਲ ਉਸੇ ਜ਼ਰੂਰੀ ਤੇ ਕਾਫੀ ਸ਼ਰਤ $b^2 - 4ac \geq 0$ ਥੱਲੇ ਹਲ ਕਰਦੇ ਸਾਂ।

ਇਹ ਹੋਮੋਜਿਨੱਸ ਇਕੂਏਸ਼ਨਾਂ ਬਣਾਂਦੀਆਂ ਹਨ ਸਪੇਸ RP^2 ਸਾਰੇ 3-ਟਪਲ (a, b, c) ਨੌਟ ਔਲ ਜ਼ੀਰੋ ਦੀ ਜਿੱਥੇ ਗੁਣਜ (at, bt, ct) ਭਿੰਨ ਨਹੀਂ, i.e., ਸਪੇਸ ਔਫ਼ ਲਾਇਨਜ਼ ਥਰੂ ਦਾ ਔਰੀਜਨ ਔਫ਼ ਸਪੇਸ R^3 ਸਾਰੇ 3-ਟਪਲ (a, b, c) ਦੀ, i.e., ਸਪੇਸ ਸਾਰੇ ਜੋੜੇਆਂ $\pm P$ ਦੀ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿਚ ਇਹ ਲਾਇਨਾਂ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ ਸਰਫ਼ੈਸ S^2 ਡੀਫ਼ਾਇਨਡ ਬਾਏ $a^2 + b^2/2 + c^2 = 1$ ਨੂੰ। ਸੋ ਇਕੂਏਸ਼ਨਜ਼ ਵਿੱਦ $b^2 - 4ac \geq 0$ ਬਣਾਂਦੀਆਂ ਹਨ ਓਹ ਸਬਸਪੇਸ RP^2 ਦੀ ਜੋ ਮਿਲਦੀ ਹੇ ਚਿਤਰ ਦੇ ਸ਼ੇਡਿਡ ਹਿੱਸੇ $-1 \leq a + c \leq +1$ ਦੇ ਆਹਮਣੇ ਸਾਹਮਣੇ ਦੇ ਪੋਐਂਟਾ ਨੂੰ ਜੋੜ ਕੇ, i.e., ਸਪੇਸ ਜੋ ਬਣਦੀ ਹੈ ਜੇ ਆਪਾਂ ਇਕ ਪੱਟੀ ਦੇ ਇਕ ਕੰਢੇ ਨੂੰ ਜੋੜ ਦਈਏ ਵਿਰੋਧੀ ਕੰਢੇ ਨਾਲ 180 ਡਿਗਰੀ ਦੇ ਮੋੜ ਤੋਂ ਬਾਦ॥



ਬਾਕੀ ਇਕੂਏਸ਼ਨਾਂ ਬਣਾਂਦੀਆਂ ਹਨ ਓਪਣ 2-ਸੈਲ – ਪੀਲੇ ਜੋੜੇਆਂ ਦਾ – ਜਿਸਨੂੰ ਮੋਬੀਅਸ ਸਟਰਿਪ ਦੀ ਬਾਉਂਡਰੀ ਨਾਲ ਚਿਪਕਾ ਕੇ ਮਿਲਦਾ ਹੈ RP^2। ਸਾਰੇ ਡਿਗਰੀ ਇਕ ਦੇ ਮੁਸਾਵਾਤ $ux + vy = 0$ ਬਣਾਂਦੇ ਹਨ RP^1 ਜੋ ਹੈ S^1 ਸੋ ਕਵਾਡਰੇਟਿਕ ਫ਼ੌਰਮੂਲਾ ਦਿੰਦਾ ਹੈ ਹੋਮੀਔਮੋਰਫ਼ੀਜ਼ਮ ਮੋਬਿਅਸ ਸਟਰਿਪ ਤੋਂ ਸਰਕਲ ਦੇ ਸਿਮਿਟਰਿਕ ਸਕਵੇਅਰ $S^1 \bullet S^1$ ਨਾਲ ਜਿਹੜਾ ਬਣਦਾ ਹੈ ਸਰਕਲ ਦੇ ਸਾਰੇ ਅਨਔਰਡਰਡ ਜੋੜੇਆਂ ਤੋਂ। ਸਾਰੀਆਂ ਕਵਾਡਰੇਟਿਕ $ax^2 + bx + c = 0$ ਬਣਾਂਦੀਆਂ ਹਨ ਸਬਸਪੇਸ $a \neq 0$ ਔਫ਼ RP^2 ਜਿਹੜੀ R^2 ਹੀ ਹੈ ਅੱਤੇ ਓਹਦੀ ਸਬਸਪੇਸ $b^2 - 4ac \geq 0$ ਹੋਮੀਓਮੋਰਫ਼ਿਕ ਹੇ ਇਕ ਬੰਦ ਅੱਧ–ਪਲੇਣ ਨਾਲ। ਕਵਾਡਰੇਟਿਕ ਫ਼ੌਰਮੂਲਾ ਦਿੰਦਾ ਹੈ ਇਹਦੀ ਹੋਮੀਓਮੋਰਫ਼ਿਜ਼ਮ $R \bullet R$ ਨਾਲ ਕਿਉਂਕੀ ਸਾਰੀਆਂ ਡਿਗਰੀ ਇਕ ਦਿਆਂ ਇਕੂਏਸ਼ਨਜ਼ $ux + v = 0$ ਸਬਸਪੇਸ $u \neq 0$ ਔਫ਼ RP^1 ਦਿੰਦੀਆਂ ਹਨ ਜੋ R ਹੀ ਹੈ।

ਕਿੱਣੇ ਹੀ ਸਵਾਲ ਖੜੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ : ਕਿ ਐਂਵੇ ਅਸੀਂ RP^n ਨੂੰ ਵੀ ਵਿਭਾਜਿਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜੋ ਸਪੇਸ ਹੈ ਡਿਗਰੀ n ਦਿਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਹੋਮੋਜਿਨੱਸ ਇਣ ਐਕਸ ਐਂਡ ਵਾਏ ਇਕੂਏਸ਼ਨਜ਼ ਦੀ ? ਸਰਕਲ ਦੇ ਸਿਮਿਟਰਿਕ nਥ ਪਾਵਰ ਦੀ ਦਿਖ ਕੀ ਹੈ ? ਵਗੈਰਾ ਵਗੈਰਾ। ਪਰ ਲਗਦਾ ਹੈ ਪਹਲਾਂ ਆਪਾਂ ਨੂੰ ਐਸੇ ਸਵਾਲਾਂ ਦੀ ਸੋਚ ਕਰਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ ਓਵਰ ਕਮਪਲੈਪਸ ਨੰਮਬਰਜ਼ C । ਹੁਣ ਨਾਂ ਸਿਰਫ਼ ਕਵਾਡਰੇਟਿਕ ਫ਼ੌਰਮੂਲਾ ਬੇਰੋਕ ਕੱਮ ਕਰਦਾ ਹੈ ਆਪਣੇ ਹੱਥ ਇਕ ਹਰਾਣੀਜਣਕ ਜੈਨਰਲ ਥੀਓਰਮ ਵੀ ਹੈ। ਫ਼ੇਰ C ਨੂੰ ਆਪਾਂ ਸਮਝਾਂ ਗੇ ਸਾਰੀਆਂ ਇਕਾਈਆਂ $ux + v = 0$ ਅਤੇ ਸਾਰੀਆਂ ਡਿਗਰੀ n ਦਿਆਂ ਬਰਾਬਰੀਆਂ $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ ਬਣਾਂਦੀਆਂ ਹਨ C^n । ਕੋਈ n ਡਿਗਰੀ ਇਕ ਦਿਆਂ ਇਕੂਏਸ਼ਨਜ਼ ਨੂੰ ਗੁਣਾਂ ਮਾਰ ਕੇ ਬਣਦੀ ਹੇ ਡਿਗਰੀ n ਦੀ ਇਕੂਏਸ਼ਨ, ਇਹ ਇਕ ਕੰਟੀਨੂਅਸ ਅੱਤੇ ਵਣ–ਵਣ ਮੈਪ $C \bullet \ldots \bullet C \rightarrow C^n$ ਹੈ nਥ ਸਿਮਿਟਰਿਕ ਪਾਵਰ ਤੋਂ : ਅਲਜੱਬਰੇ ਦੀ ਮੌਲਿਕ ਥੀਓਰਮ ਕਹੰਦੀ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਮੈਪ ਹੋਮੀਓਮੋਰਫ਼ਿਜ਼ਮ ਹੈ ! ਓਸ ਜਾਦੂਈ ਜ਼ਰਬ ਦੇ ਬਦੌਲਤ ਜਿਨ੍ਹੇ R^2 ਨੂੰ C ਬਣਾ ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਇਹ ਮੈਪ ਤਾਂ ਇਕਦੱਮ ਸਰਲ ਹੈ ਪਰ ਨਤੀਜਾ ਹਿਲਾ ਦੇਣ ਵਾਲਾ : ਜਾਪਦਾ ਹੈ $R^2 \bullet \ldots \bullet R^2$ ਵਿਚ ਬਹੁਤ ਹੀ ਸਿੰਗੁਲੈਰੀਟੀਜ਼ ਹੋਣ ਗਿਆਂ ਥਿਓਰਮ ਕਹੰਦੀ ਹੈ ਐਸਾ ਕੁਝ ਵੀ ਨਹੀਂ ! ਇਹ ਹੀ ਦਰਅੱਸਲ ਥਿਓਰਮ ਦਾ ਦਿਲ ਹੈ ਨਤੀਜਾ ਇਹ ਸਿੰਗਲੈਰੀਟੀਜ਼ ਦੀ ਗੈਰਹਾਜ਼ਰੀ ਦੇ ਇਕੂਵੇਲੈਂਟ ਹੀ ਹੈ : ਦੇਖੋ ਨੋਟ (ਦ – ਬ) । ਇਹ ਅਲਜੱਬਰੇ ਦੇ ਮੂਲ ਤਤ ਦੇ ਨਾਲ ਹੀ ਉਠਦਾ ਹੈ ਅਲਜੱਬਰੇ ਦਾ ਮੂਲ ਮਸਲਾ : ਇਨਵਰਸ ਹੋਮੀਓਮੋਰਫ਼ਿਜ਼ਮ ਦਾ ਸਰਲ ਤੋਂ ਸਰਲ ਵਰਨਣ ਲੱਭੋ ! ਕਿੱਣੀਆਂ ਹੀ ਸੱਦੀਆਂ ਦੀ ਤਰੱਦਦ ਤੋਂ ਬਾਦ ਜਾਪਦਾ ਹੈ ਕਿ ਸਿਧਾਂਤਕ ਤੌਰ ਤੇ ਤਾਂ ਪਵਾਂਕਾਰੇ ਨੇ ਸੌ ਸਾਲ ਤੋਂ ਪਹਲਾਂ ਹੀ ਇਸ ਸਵਾਲ ਦਾ ਜਵਾਬ ਦੇ ਦਿੱਤਾ ਸੀ ਪਰ ਓਫ਼ਸੋਸ ਅਜ ਤਕ ਵੀ ਕਿਸੀ ਨੇ ਇਹਨੂੰ ਬਿਲਕੁਲ ਸਾਫ਼ ਸਾਫ਼ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿਚ ਨਹੀਂ ਪੇਸ਼ ਕੀਤਾ ਹੈ ।

ਸੰਖੇਪ ਵਿੱਚ ਰੂਫ਼ੀਨੀ ਅੱਤੇ ਆਬਲ ਨੇ ਸਿੱਧ ਕਰ ਦਿੱਤਾ ਕਿ ਕਵਾਡਰੇਟਿਕ ਜੈਸੇ ਫ਼ੌਰਮੂਲੇ ਨਹੀਂ ਕਮ ਕਰਦੇ $n > 4$ ਲਈ । ਪਰ ਐਸੇ ਫ਼ੌਰਮੂਲੇ ਸਿੱਹਗੇ $n \le 4$ ਲਈ ਅੱਤੇ ਇਹ ਨੋਟ ਹੋ ਚੁਕੇਆ ਸੀ ਕਿ ਓਹ ਟਰਿਗਨੋਮੈਟਰੀ ਦੀਆਂ ਸਿੰਗਲੀ ਪੀਰਿਔਡਿਕ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨਜ਼ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਨਾਲ ਸਰਲ ਬਣ ਜਾਂਦੇ ਸਨ। ਆਬਲ ਤੇ ਜੈਕੋਬੀ ਨੇ ਇਨਵਰਸ ਨੂੰ $n = 5, 6$ ਲਈ ਸਮਝ ਲੇਆ ਪਲੇਣ ਦਿਆਂ ਦੋਹਰੀ ਪੀਰਿਔਡਿਕ ਮੈਰੋਮੌਰਫ਼ਿਕ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨਜ਼ ਦਾ ਇਸਤਮਾਲ ਕਰ ਕੇ । ਪਲੇਨ ਦੀ ਯੁਕਲਿਡ ਦੀ ਜੀਓਮੈਟਰੀ ਥੱਲੇ ਦੋ ਤੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਆਜ਼ਾਦ ਪੀਰਿਅਡ ਨਾਮੁਮਕਿਣ ਹਨ । ਪਰ ਅਗਰ ਅਸੀਂ ਪਲੇਨ ਦੀ ਬਨਾਵਟੀ ਬੇਅੰਤਤਾ ਤਿਆਗ ਦਈਏ ਅਤੇ ਉਸਨੂੰ ਇਕ ਫ਼ਾਨਾਇਟ ਰੇਡੀਅਸ $c < \infty$ ਦੀ ਡਿਸਕ ਵੱਜੋਂ ਤੱਕੀਏ – ਦੇਖੋ ਪਲੇਨ ਜੀਓਮੈਟਰੀ ਐਂਡ ਰੈਲੇਟੀਵੀਟੀ – ਤਾਂ ਓਹ ਸੱਭ ਲੀਨੀਅਰ ਰੀਫ਼ਲੈਕਸ਼ਨਜ਼ ਮਿਲ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ ਜੋ ਇਹਦੇ ਕੋਨ ਨੂੰ ਓਹਦੇ ਵਿੱਚ ਹੀ ਮੈਪ ਕਰਦੀਆਂ ਹਨ । ਇਹ ਕਿਤੇ ਜਿਆਦੀਆਂ ਹਨ ਓਹਨਾਂ ਦੇ ਮੁਕਾਬਲੇ ਜੋ ਕੀ ਕਲਾਸੀਕਲ ਯਾਂ ਯੁਕਲੀਡੀਅਣ ਲਿਮਿਟ $c \to \infty$ ਵਿਚ ਮੌਜੂਦ ਹਨ । ਰੈਲੇਟਿਵਿਸਟਿਕ ਪਲੇਨ ਉਤੇ ਓਣੀਆਂ ਹੀ ਅਛੀਆਂ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨਜ਼ ਹਨ ਜਿਨ੍ਹਾ ਦੇ ਮਨ ਮਰਜੀ ਨੰਬਰ ਦੇ ਆਜ਼ਾਦ ਪੀਰੀਅਡ ਹਨ ਅਤੇ ਪਵਾਂਕਾਰੇ ਦਾ ਜਵਾਬ ਇਹਣਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦਾ ਹੈ ।

ਇਨਵਰਸ ਦੀ ਜਟਿਲਤਾ ਦੇ ਮੱਦੇਨਜ਼ਰ ਸ਼ਾਇਦ ਆਪਾਂ ਨੂੰ ਕੁਝ ਹੱਦ ਤੱਕ ਆਪਣਾ ਸਰਲ ਮੈਪ ਹੀ ਤਿਆਗ ਦੇਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ - ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ R^2 ਦੀ ਜਾਦੂਈ ਕੰਮਪਲੈਕਸ ਜ਼ਰਬ ਹੀ - ਜੇ ਇਹ ਕੀਮਤ ਦੇ ਕੇ ਉਸਦੀ ਕੋਈ ਅੱਛੀ ਡੈਫ਼ੌਰਮੇਸ਼ਨ ਖ਼ਰੀਦੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਇਨਵਰਸ ਓਣਾ ਹੀ ਅੱਛਾ ਹੈ ? ਇਹ ਵਿਚਾਰ ਦਾ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕੁਝ ਲੈਣਾ ਦੇਣਾ ਹੋਏ ਮੋਚੀਜ਼ੁਕੀ ਦੇ ਪਿਛਲੇ ਕੁਝ ਸਾਲਾਂ ਦੇ ਕੰਮ ਨਾਲ …

ਕੇ ਐਸ ਸਰਕਾਰੀਆ ੧੯ ਅਪਰੈਲ ੨੦੧੨