



ੴ

1. ਹਾਂ, ਮੈਂ ਉਹਦੀਆਂ ਸੱਭ ਰੁਬਾਇਆਂ ਪੜ੍ਹੀਆਂ ਹਨ (ਫਿਟਜ਼ਜੈਰਲਡ ਦੇ ਤਰਜਮੇ ਥੱਲੇ) ਅਤੇ ਇਹਾਂ ਵਿਚੋਂ ਕੁਝ ਰਚਨਾਵਾਂ ਸੱਚੀਂ ਲਾਜ਼ਮਾਬ ਹਨ, ਪਰ ਮੇਰੇ ਖਿਆਲ 'ਚ ਖਿਆਮ ਦਾ ਸਰਕਲ ਮੈਥੱਡ - ਦੇਖੋ ਪਹਲੀ ਤਸਵੀਰ - ਇਹਣਾਂ ਸੱਭ ਤੋਂ ਕਿਤੇ ਹਸੀਨ ਹੈ।
 2. ਕਿੰਵੇਂ ਤੇ ਕਿਉਂ ਇਹ ਹਲ ਕਰਦਾ ਹੈ ਕੋਈ ਕਿਉਂਕਿ $x^3 + Ax + B = 0$ ਸਿਧ ਕਰਦਿਆਂ ਹਨ ਇਸ ਤਸਵੀਰ ਥੱਲੇ ਲਿਖਤ ਕੁਝ ਹੀ ਪੰਕਤਿਆਂ। ਏਥੇ $B \neq 0$, ਸੋ ਕੋਈ ਰੂਟ 0 ਨਹੀਂ, ਅਤੇ $y = x^2$ ਤੇ ਜਿਹੜੇ ≤ 3 ਬਿੰਦੂ ਆਪਾਂ ਕਟ ਮਹਨੇ ਹਨ ਉਹ $(0, 0)$ ਨੂੰ ਛੱਡ ਹਨ।
 3. 'ਕਵਾਡਰੋਟਿਕਸ' $B = 0$ ਬਣਾਂਦੀਆਂ ਹਨ y -ਐਕਸਿਸ। ਜੇ ○ ਇਸ ਰੇਖਾ ਉਤੇ ਹੈ ਤਾਂ ਸਰਕਲ $y = x^2$ ਨੂੰ ਟੈਂਜੈਂਟ ਹੈ $(0, 0)$ ਉਤੇ, ਅਤੇ ਇਹ ਵੀ ਇਕ ਕਟ ਹੈ। ਜੇ ਅੱਗੇ $A = 0$ ਤਾਂ ਉਹਦੀ ਰੇਡਿਅਸ $\frac{1}{2}$ ਅਤੇ $(0, 0)$ ਤੇ $y = x^2$ ਦੀ ਰੇਡਿਅਸ ਔਫ਼ ਕਰਵੇਚਰ ਬਗਾਬਰ ਹਨ।

8. ਹਰ ਕਿਉਂਬਿਕਸ ਹੋ ਦੀ ਲਾਈਨ $2x + 2\alpha y = \alpha + \alpha^3, \alpha \neq 0$ ਤੇ ਦੋ ਦੋ ਦੋ ਰੂਟ ਹਨ, ਇਹ ਹਨ $(x - \alpha)(x + \frac{1}{2}\alpha)^2 = 0$ ਅਤੇ $(x - \alpha)^2(x + 2\alpha) = 0$, i.e., $x^3 - \frac{3}{4}\alpha^2x - \frac{1}{4}\alpha^3 = 0$ ਅਤੇ $x^3 - 3\alpha^2x + 2\alpha^3 = 0$, i.e., ਪੌਅੰਟ $(\frac{1}{8}\alpha^3, \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\alpha^2)$ ਅਤੇ $(-\alpha^3, \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\alpha^2)$ ਜੋ ਲਾਲ ਕਰਵਜ਼ $y = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}, x \geq 0$ ਉਤੇ ਹਨ। ਅਗੇ ਇਹ ਰੇਖਾ ਦੁਜੇ ਪੌਅੰਟ ਤੇ ਟੈਜ਼ੈਟ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਏਥੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ $dy/dx = x^{-1/3}$ ਇਹਦੀ ਸਲੋਪ $-1/\alpha$ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

ਪ. ਓਮਾਰ ਦਾ ਤਰੀਕਾ ਸਾਂਝੂ ਦੱਸਦਾ ਹੈ ਕਿ ਜੇਹੜੀ ਫੰਕਸ਼ਨ ਦੀ ਹਰ ਕਿਉਂਬਿਕ ਹੋ ਉਤੇ ਕੀਮਤਾਂ ਉਹਦੇ ਸੱਭ ਰੰਗਿਲ ਰੂਟਸ ਹਨ, ਇਹਦਾ ਗਰਾਫ $G \subset \mathbb{R}^3$ ਡਿਸਜ਼ੈਂਟ ਯੂਨੀਅਨ ਹੈ ਲਾਈਣਾਂ α^* ਦਾ ਜੋ @ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਉਚਾਈ α ਉਤੇ ਹਨ। ਸੋ ਇਹ ਸੱਰਫੈਸ \mathbb{R}^2 ਨੂੰ y -ਐਕਸਿਸ 'ਚ ਕੱਟਦਾ ਹੈ, ਹੋਮੀਓਮੋਰਫਿਕ ਹੈ ਪਲੇਣ ਨਾਲ, ਅਤੇ ਇਹਦੀ ਇਕੁਏਸ਼ਨ $2x + 2zy = z + z^3$ ਹੈ।

੯. ਓਹ ਪੀਲੇ 'ਮੋਰਪੰਖ' ਦੇ ਕੋਮਪਲੀਮੈਂਟ ਦਿਆਂ ਅਧ੍ਯ-ਲਾਈਨਾਂ @ ਡਿਸਜ਼ੈਂਟ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਉਤੇ ਅਧ੍ਯ-ਰੇਖਾਂਵਾਂ α^* ਬਣਾਈਆਂ ਹਨ G ਦਾ ਇਕ ਹੋਮੀਓਮੋਰਫਿਕ ਸਬਸੈਟ ਜਿਹਦੀ ਹਦ ਹੈ ਪੌਅੰਟ $(0, \frac{1}{2}, 0)$ ਅਤੇ ਦੋਆਂ ਲਾਲ ਕਰਵਜ਼ ਉਤੇ G ਦੇ ਦੋ ਕਰਵਜ਼ ਵਿੱਚੋਂ ਇਕ। ਜੇ ਆਪਾਂ G ਦੇ ਬਾਕੀ ਹਿੱਸੇ ਵਿੱਚੋਂ ਹੁਣ ਮਨਫ਼ੀ ਕਰ ਏਈਏ ਦੁਜੀਆਂ ਦੇ ਕਰਵਜ਼ ਤਾਂ ਬੱਚਦਿਆਂ ਹਨ, ਮੋਰਪੰਖ ਦੀਆਂ ਤਿਣੀਆਂ ਨਕਲਾਂ ਜੋ ਸੱਭ ਇਸ ਨਾਲ ਜੁਕਿਆਂ ਹਨ $(x, y, z) \mapsto (x, y)$ ਥਾਂਹਿ।

੧੦. ਕੋਈ ਰੇਖਾ @ ਐਕਸ ਐਕਸਿਸ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਨਹੀਂ, ਅਤੇ ਇਕ ਤੇ ਸਿਰਫ ਇਕ ਹਰ ਦੂਜੀ ਦਿਸ਼ਾ ਦੇ, ਸੋ G ਦਿਆਂ ਕਰਵਜ਼ $y = k$ ਕਟਦੀਆਂ ਹਨ ਹਰ α^* ਨੂੰ ਇਕ ਤੇ ਸਿਰਫ ਇਕ ਵਾਰ। ਜੇ $k \leq \frac{1}{2}$ ਤਾਂ ਇਹ ਕਰਵਜ਼ ਗਰਾਫ ਹਨ ਇਕ-ਕੀਮਤੀ ਲਗਾਤਾਰ ਵੱਧਦੀ ਫੰਕਸ਼ਨ z ਅੰਫ x ਦੇ, ਪਰ ਜੇ $k > \frac{1}{2}$ ਤਾਂ ਇਹਨਾਂ ਗੱਢੇ ਇਕ S ਸ਼ੇਪ ਪੈਦਾ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਜੋ ਫੇਰ k ਦੇ ਨਾਲ ਵੱਧਦੀ ਹੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

੧੧. ਸੋ, ਸਾਰਿਆਂ ਕਿਉਂਬਿਕਸ @ ਦਾ ਕੋਈ ਹਲ ਨਹੀਂ 'ਅਲ ਜੱਬਰੇ' ਕੋਲ, ਯਾਣੀ ਕਿ, A ਤੇ B ਦਾ, ਇਕੁਵੈਲੈਂਟਲੀ x ਤੇ y ਦਾ, ਕੋਈ ਫੌਰਮੂਲਾ $z(x, y)$ ਨਹੀਂ ਜੋ ਸਿਰਫ \mathbb{R} ਦੇ ਪੰਜ ਪਿਆਂ - ਜਮਾਂ, ਮਨਫ਼ੀ, ਜ਼ਰਬ, ਤੱਕਸੀਮ, ਸੱਰਡਜ਼ - ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਨਾਲ ਬਣਾਂਦਾ ਹੈ G । ਕਿਉਂਕਿ, ਸ਼ੇਪ S ਦੀ ਕੋਈ ਓਰਡਰ ਦੇ ਦੀ ਹੋਮੀਓਮੋਰਫਿਕਸ ਨਹੀਂ ਜੋ ਇਹਦੇ ਸੈਗਮੈਂਟ ਉਤੇ ਪਰੋਜੈਕਸ਼ਨ ਨੂੰ ਪਰੀਜ਼ਰਵ ਕਰਦੀ ਹੈ।

੧੨. 'ਵਰਗ ਪੁਰਤੀ' ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਦਸਦੀ ਹੈ ਸਾਨੂੰ ਕਿਸੀ ਵੀ @ ਓਵਰ G ਦੀ ਬਣਾਵਟ। ਇਸ ਲਾਈਨ ਉਤੇ ਇਕੁਏਸ਼ਨ ਹਨ $x^3 + Ax + B = (x - \alpha)(x^2 + \alpha x + A + \alpha^2) = 0$ । ਕਵਾਡਰੋਟਿਕ ਫੇਕਟਰਜ਼ ਦੇ ਰੂਟ ਬਣਾਂਦੇ ਹਨ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਜਿਹਦੀ ਵਰਟੈਕਸ, ਜੇ $\alpha \neq 0$ ਹੋਏ ਤਾਂ, ਪਹਲੀ ਲਾਲ ਕਰਵ ਉਤੇ ਉਚਾਈ $-\alpha/2$ ਤੇ ਹੈ, ਅਤੇ ਜਿਹਦੇ ਦੂਜੀ ਲਾਲ ਕਰਵ ਉਤੇ ਦੋ ਪੌਅੰਟਸ ਉਚਾਈ α ਤੇ -2α ਉਤੇ ਹਨ। ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਅਤੇ α^* ਦਾ ਯੂਨਿਅਨ ਦਿੰਦਾ ਹੈ @ ਓਵਰ G ਦੇ ਸਾਰੇ ਪੌਅੰਟ।

੧੩. 'ਕਿਉਥ ਪੁਰਤੀ' ਨਾਲ ਆਪਾਂ ਕਿਸੀ ਵੀ ਇਕੁਏਸ਼ਨ ਨੂੰ ਟਰਾਂਸਲੇਟ ਕਰਕੇ ਦੂਜੀ ਟਰਮ ਤਾਂ ਗੁਲ ਕਰ ਹੀ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਪਰ ਮਜ਼ੇਦਾਰ ਗਲ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਜਿਸ ਚੀਜ਼ ਦੀ ਆਸ਼ਾ ਬੱਚੀ ਹੈ -- ਚਿੱਤਰ ਦੇ ਨਿੱਚਲੇ ਸਾਰੇ ਕਿਉਂਬਿਕਸ @ ਦਾ ਅਲ ਜੱਬਰਿਕ ਹਲ ਹੈ -- ਨੂੰ ਵੀ ਇਹੋ ਵਿੱਧੀ ਸਿਰੇ ਚੜਾਂਦੀ ਹੈ :-

੧੪. α^3 ਦੇ ਸਾਰੇ ਬਾਈਨੋਮੀਅਲ ਵਿਭਾਜਨ ਬਣਾਂਦੇ ਹਨ ਨਿਚੌਲੀ ਅਧ੍ਯ-ਰੇਖਾ @। $\alpha^3 = (u + v)^3$ 'ਚੋਂ ਮਨਫ਼ੀ ਕਰਕੇ ਤਿੱਣ ਬੱਕਸੇ $3u^2v$ ਅਤੇ ਤਿੱਣ $3uv^2$, ਸੋ $3uv\alpha$, ਬੱਚਦੇ ਹਣ ਦੋ ਕਿਉਥ $u^3 + v^3$, ਸੋ α ਰੂਟ ਹੈ ਉਸ @ ਦਾ ਜਿਹਦਾ $A = -3uv$ ਅਤੇ $B = -u^3 - v^3$ । ਅਗੇ, ਕਿਉਂਕਿ $u^3v^3 = -A^3/27$, α ਜੋਤ ਹੈ $x^2 + Bx - A^3/27 = 0$ ਦੇ ਰੂਟਾਂ ਦੇ ਕਿਉਥ ਰੂਟਸ ਦਾ। ਮੈਪ @ $(u, v) = (\frac{u^3+v^3}{2}, \frac{3uv+1}{2})$ ਯੂ ਅਤੇ ਵੀ ਦੋ ਪਲੇਣ ਦੀ ਡਾਏਗਨਲ $u = v$ ਉਤੇ ਸਮਿਟਰੀਕਲ ਦੁਹਰੀ ਤਹ ਲਗਾ ਕੇ ਦਿੰਦਾ ਹੈ ਦੂਸਰੀ ਤਸਵੀਰ ਦਾ ਮੋਰਪੰਖ ਨੂੰ ਛੱਡ ਸਾਰਾ ਹਿੱਸਾ।

ਇਹਦਾ ਮੇਰਾ ਇਸ ਸਾਲ ਹੀ ਓਮਾਰ ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਇਸ ਕਹਾਣੀ ਨੂੰ ਅੱਪ ਟੂ ਡੇਟ ਕਰ ਦੇਨ ਦਾ ਸੀ ਨੋਟਸ ਰਾਹੀਂ, ਪਰ ਹੁਣ--ਜੇ ਰੱਬ ਦੀ ਮਰਜ਼ੀ ਹੋਈ--ਬਾਕੀ ਨੋਟ ਅੱਗਲੇ ਵਰ੍ਹੇ। ੩੧ ਦੱਸੱਮਬਰ ੨੦੧੭॥