ਸੱਭ ਤੋਂ ਪਿਆਰੀ ਰੱਚਣਾ, ਭਾਗ ਚੌਥਾ

੫੧. ਵਿਚ ਨੋਟ ੪੯ ਦੇ ਤਾਂ ਮੱਨੋਂ ਆਪਾਂ ਅਗਿਆਤਾਂ $\mathbf{x}$ ਅਤੇ $\mathbf{y}$ ਵਿਚ ਸਾਰੀਆਂ ਡਿਗਰੀ n ਦਿਆਂ ਹੋਮੋਜੀਨਸ ਇਕੁਏਸ਼ਨਜ਼ ਦੀ ਸਪੇਸ $\mathbb{R}P^n$ ਉੱਤੇ ਲੀਨੀਅਰ ਸਬਸਟੀਚੁਏਸ਼ਨਜ਼ ਵਾਲੇ ਓਹ "ਬੇਬੀ ਏਕਸ਼ਨ" ਦੀ ਜੀਓਮੈਟਰੀ ਦੀ ਝੱਲਕ ਹੀ ਦੇਖੀ ਸੀ। ਕੰਮ ਕਰਦੇ ਬੇਬੀ ਗਰੁਪ $\mathcal{G}$ ਵਿਚ ਹਨ $\mathbb{R}^2$ ਦਿਆਂ ਲੀਨੀਅਰ ਆਈਸੋਮੋਰਫ਼ਿਜ਼ਮਜ਼ ਵਲੋਂ ਇਨਡੀਉਸਡ ਓਹਦੇ ਓਰੀਜਨ ਵਿਚੋਂ ਲੰਘਦੀਆਂ ਰੇਖਾਂਵਾਂ ਦੀ ਸਪੇਸ $\mathbb{R}P^1$ ਦਿਆਂ ਬਾਈਜੈਕਸ਼ਨਜ਼। ਸੋ ਇਹ ਕੋਸ਼ੈਂਟ ਹੈ ਗਰੁਪ $GL(2,\mathbb{R})$ ਦਾ ਤੱਕਸੀਮ ਦੇਕੇ ਓਹ ਸੱਭ ਡਾਏਗਨਲ ਮੇਟਰੀਸਿਜ਼ ਨਾਲ ਜਿਹਨਾਂ ਦਿਆਂ ਦੋਨੋਂ ਐਂਟਰੀਜ਼ ਬਰਾਬਰ ਹਨ। ਸੋ ਆਪਣੇ ਗਰੁਪ $\mathcal{G}$ ਦੇ ਹਰ ਐਲੀਮੈਂਟ ਨੂੰ ਆਪਾਂ ਮੰਣ ਸਕਦੇ ਹਾਂ 2×2 ਮੈਟਰੀਸਿਜ਼ ਦੇ ਇਕ ਜੋੜੇ $\pm A$ ਵਜੋਂ ਜਿਹਨਾਂ ਦਾ ਡੈਟਰਮੀਨੈਂਟ ± 1 ਹੈ। ਫ਼ਲਸਰੂਪ $\mathcal{G}$ ਦੀ ਡਾਈਮੈਨਸ਼ਨ ਤਿਣ ਹੈ ਪਰ ਨੋਟ ੪੯ ਵਿਚ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਸਿਰਫ਼ ਵਿਚਾਰ ਰਹੇ ਸੀ ਓਹਦਾ ਓਹ ਇਕ ਡਾਈਮੈਨਸ਼ਨਲ ਸਬਗਰੁਪ ਜੋ ਬਣਾਂਦੇ ਹਨ ਸੱਭ ਜੋੜੇ $\pm A\in SO(2,\mathbb{R})$।

ਇਹਦਾ ਦੋਹਰਾ ਕਵਰ $\tilde{\mathcal{G}}$--ਯਾਣੀ ਕਿ ਗਰੁਪ ਸਾਰੀਆਂ ਮੈਟਰਰੀਸਿਜ਼ A ਦਾ ਜਿਹਨਾਂ ਦਾ ਡੈਟਰਮੀਨੈਂਟ ± 1 ਹੈ, ਯਾਂ ਫ਼ੈਰ $GL(2,\mathbb{R})$ ਨੂੰ ਤਕਸੀਮ ਕਰਦੋ ਡਾਏਗਨਲ ਮੇਟਰੀਸਿਜ਼ ਨਾਲ ਜਿਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਐਂਟਰੀਜ਼ ਬਰਾਬਰ ਤੇ ਪੌਜ਼ੀਟਿਵ ਹਨ--ਗਰੁਪ ਹੈ $\mathbb{R}^2$ ਦੀ ਓਰੀਜਨ ਚੋਂ ਲੰਘਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਰੇਜ਼ ਦੀ ਸਪੇਸ S^1 ਦੀਆਂ ਬਾਈਜੈਕਸ਼ਨਜ਼ ਦਾ ਜੋ $\mathbb{R}^2$ ਦੇ ਲੀਨੀਅਰ ਆਈਸੋਮੋਰਫ਼ਿਜ਼ਮ ਇਨਡੀਉਸ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਇਹ ਗਰੁਪ ਕੰਮ ਕਰਦੈ ਲੀਨੀਅਰ ਸਬਸਟੀਚੁਸ਼ਨਜ਼ ਨਾਲ $\mathbb{R}P^n$ ਦੇ ਦੋਹਰੇ ਕਵਰ ਉੱਤੇ, ਯਾਣੀ ਕਿ S^n ਜੋ ਬਣਾਂਦੀਆ ਹਨ ਸਾਰੀਆਂ ਹੋਮੋਜੀਨਸ ਡਿਗਰੀ n ਦੀਆਂ ਨਾਂ-ਬਰਾਬਰੀਆਂ $a_n\mathbf{x}^n+a_{n-1}\mathbf{x}^{n-1}\mathbf{y}+\cdots+a_1\mathbf{x}\mathbf{y}^{n-1}+a_0\mathbf{y}^n\geq 0$, ਜਿੱਥੇ ਜ਼ਰੁਰ ਇਕ ਕੋਐਫ਼ੀਸ਼ੈਂਟ a_i ਨੌਨਜ਼ੀਰੋ ਹੈ।

ਜੇ $n\geq 2$ ਤਾਂ S^n ਸਿਮਪਲੀ ਕੋਨੈਕਟਿਡ ਹੈ ਅਤੇ $\mathbb{R}P^n$ ਨਹੀਂ, ਪਰ S^1 ਤੇ $\mathbb{R}P^1$ ਦੀ ਟੌਪੋਲੋਜੀ ਇਕੋ ਹੈ। ਇਹ ਹੀ ਕਾਰਣ ਹੈ ਕਿ ਡਾਈਮੈਨਸ਼ਨ ਦੋ ਦੇ ਮੈਨੀਫ਼ੋਲਡਜ਼ ਲਈ ਹੀ ਓਹਨਾਂ ਦੇ ਸਿਮਿਟਰਿਕ ਪਾਵਰਜ਼ ਵੀ ਮੈਨੀਫ਼ੋਲਡਜ਼ ਹਨ, ਅਤੇ ਐਫ਼ ਟੀ ਏ ਸਹੀ ਹੈ।

ਵਿਪ੍ਰੀਤ ਇਹਦੇ, $(S^1,\tilde{\mathcal{G}})$ ਤੇ $(\mathbb{R}P^1,\mathcal{G})$ ਦੀ ਜੀਓਮੈਟਰੀ ਭਿੰਨ ਹੈ, ਕੋਈ ਬਾਈਜੈਕਸ਼ਨ $S^1\to\mathbb{R}P^1$ ਐਸੀ ਨਹੀਂ ਜੋ ਟਰਾਂਸਫ਼ਰਮੇਸ਼ਨ ਗਰੁਪ $\tilde{\mathcal{G}}$ ਨੂੰ ਬਣਾ ਦੇ $\mathcal{G}$:- ਪਹਲੀ ਜੀਓਮੈਟਰੀ ਦੇ ਫ਼ਿਕਸਡ ਪੌਐਂਟ ਜੋੜੇਆਂ 'ਚ ਹਨ--ਇਕ ਰੇ ਅਤੇ ਓਹਦੀ ਉਲਟ ਰੇ--ਪਰ ਦੂਜੀ ਜੀਓਮੈਟਰੀ 'ਚ ਇਹ ਸਚ ਨਹੀਂ। □ ਏਥੇ ਤੇ ਕਈ ਜਗ੍ਹਾ ਥੱਲੇ ਵੀ ਕਲਾਇਨ ਵਾਂਗੂੰ ਅਸੀ ਸ਼ਬਦ ਜੀਓਮੈਟਰੀ ਦਾ ਭਾਵ ਸਮਝਾਂ ਗੇ, ਇਕ ਸੈਟ ਜਿਹਦੀਆਂ ਬਾਈਜੈਕਸ਼ਨਜ਼ ਦਾ ਇਕ ਸਬਗਰੁਪ ਸਾਨੂੰ ਦਿਤਾ ਹੋਏਆਂ ਹੈ।

ਦਰਅਸਲ, ਭਾਂਵੇ ਸਪੈਸਿਜ਼ $\tilde{\mathcal{G}}$ ਤੇ $\mathcal{G}$ ਦੀ ਟੋਪੌਲੋਜੀ ਇਕ ਹੈ, ਅਤੇ ਦੋਆਂ ਦੇ ਦੋਂਵੇਂ ਕੌਮਪੋਨੈਂਟ ਸਰਕਲਜ਼ ਨੂੰ ਰਿਟਰੈਕਟ ਕਰਦੇ ਹਨ, ਇਹ ਐਬਸਟਰੈਕਟ ਗਰੁਪਸ ਵੀ ਭਿੰਨ ਹਨ :- ਬੈਬੀ ਗਰੁਪ ਦੇ ਆਈਡੈਂਟਿਟੀ ਕੌਮਪੋਨੈਂਟ $\mathcal{G}_0$ ਨੂੰ ਆਪਾਂ ਮੰਨ ਸਕਦੇ ਹਾਂ $PSL(2,\mathbb{R})=SL(2,\mathbb{R})/\pm I$ ਜੋ ਸਿੰਪਲ ਗਰੁਪ ਹੈ, ਦੇਖੋ ਅਗਲਾ ਨੋਟ, ਸੋ ਇਹ ਨਹੀਂ ਆਈਸੋਮੌਰਫ਼ਿਕ ਆਪਣੇ ਕਵਰ $\tilde{\mathcal{G}}_0=SL(2,\mathbb{R})$ ਨਾਲ। □

ਦੂਜੇ ਹੱਥ, ਇਹਦਾ ਸਬਗਰੁਪ $SO(2,\mathbb{R})/\pm I$ ਆਈਸੋਮੋਰਫ਼ਿਕ ਹੈ ਆਪਣੇ ਕਵਰ $SO(2,\mathbb{R})$ ਨਾਲ $A\mapsto A^2$ ਥੱਲੇ :- ਕਿਉਂਕਿ ਜਦ ਅਸੀਂ $SL(2,\mathbb{R})$ ਦਿਆਂ ਮੈਟਰਸਿਜ਼ ਸਕਵੇਅਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਐਬੀਲੀਅਨ ਸ਼ਬਗਰੁਪ $SO(2,\mathbb{R})$ ਮੈਪ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਆਪਣੇ ਉਤੇ ਵਿਦ ਕਰਨਲ $\pm I$। □

ਇਹ ਦਸਦੈ ਕਿ ਪੂਰੇ ਬੇਬੀ ਗਰੁਪ ਦਾ ਐਕਸ਼ਨ ਸਮਝਣ ਲਈ ਸਾਵਧਾਨੀ ਦੀ ਜ਼ਰੁਰਤ ਹੈ, ਪਰ ਅਮੁਮਣ ਇਹ ਕਰਦੇ ਅਸੀਂ ਨੋਟ ੪੯ ਦੀ ਸਰਕਲਜ਼ ਨਾਲ ਫ਼ੋਲੀਏਸ਼ਨ ਤੋਂ ਵੀ ਗਹਾਂ ਨਿਕੱਲ ਜਾਂਵਾਂਗੇ।

੫੨. ਸੰਦਰਭ ਵਿਚ ਜੋ ਅਸੀਂ ਹੁਣੇ ਹੁਣੇ ਵਰਤੇਆ ਸੀ, ਗਲ੍ਹ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਸੌ ਸਾਲ ਤੋਂ ਇਹ ਪਤਾ ਹੇ ਕਿ, ਜੇ $n\geq 2$ ਤੇ $\mathbb{F}$ ਕੋਈ ਫ਼ੀਲਡ ਹੈ, ਤਾਂ $PSL(n,\mathbb{F})$ ਸਦਾ ਸਿੰਪਲ ਗਰੁਪ ਹੀ ਹੈ, ਛੱਡ ਸਿਰਫ਼ ਇਹ ਦੋ ਕੇਸ, $PSL(2,\mathbb{F}_2)\cong S_3$ ਅਤੇ $PSL(2,\mathbb{F}_3)\cong A_4$। ਇਕ ਸਰਲ ਪਰੁਫ਼ ਹੈ ਮਸਲਣ ਕੌਨਰੈਡ ਦੇ ਇਕ ਨੰਵੇ ਪਰਚੇ ਵਿਚ। ਪਰ ਇਹ ਤੱਥ ਕਿ $PSL(2,\mathbb{F}_5)\cong A_5$ ਦੇ ਨਾਲ ਨਾਲ ਸਾਰੇ $PSL(2,\mathbb{F}_p)$, $p>5$, ਵੀ ਸਿੰਮਪਲ ਗਰੁਪ ਹਨ ਦਾ ਜ਼ਿਕਰ ਖੁਦ ਗਾਲਵਾ ਨੇ ਕੀਤਾ ਸੀ !

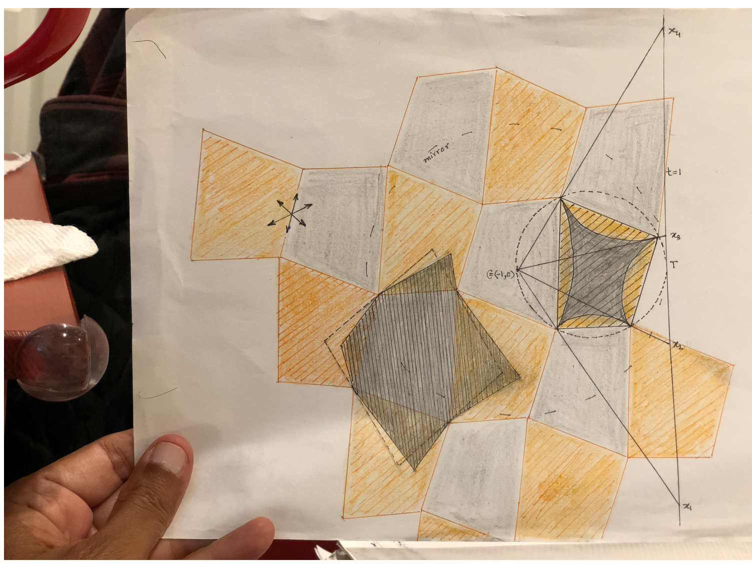
ਸੋ $PSL(2,\mathbb{R})$ ਦਾ ਕੋਈ ਨੌਨ ਟਰਿਵੀਅਲ ਕੋਸ਼ੈਂਟ ਗਰੁਪ ਨਹੀਂ। ਪਰ ਇਹਦੇ ਨਾ ਸਿਰਫ਼ $PSL(2,\mathbb{Z})$ ਵਗੈਰਾ, ਪਰ ਅਣਗਿਣੱਤ ਡਿਸਕਰੀਟ ਸਬਗਰੁਪ ਹਨ: ਰੇਡੀਅਸ $c<\infty$ ਦੇ ਡਿਸਕ ਦਿਆਂ ਰੈਲੀਟੀਵੀਟੀ ਵੱਜੋਂ ਰੈਗੁਲਰ ਟਾਈਲਿੰਗਜ਼ ਦਿਆਂ ਸਿਮਿਟਰੀਜ਼ ਦੇ! ਅਤੇ ਇਹ ਇਨਫ਼ਾਈਨਾਇਟ ਟਾਈਲਿੰਗਜ਼ ਕਾਫ਼ੀ ਵਾਰ ਕਵਰ ਕਰਦਿਆਂ ਹਨ ਕਲੋਜ਼ਡ ਸਰਫੈਸਿਜ਼ ਦਿਆਂ ਫ਼ਾਏਨਾਇਟ ਰੈਗੁਲਰ ਟਾਏਲਿੰਗਜ਼ $\{p,q\}$। ਇਸ ਹਦ

ਤਕ -- ਪੜੋ ਹੁਣ ਤੇ ਅੱਛੀ ਤਰਹਾਂ ਸਮਝ ਲਓ ਮੈਜਿਕ ਕਾਰਪੈਟ (੨੦੧੦) ਅੱਗੇ ਜਾਨ ਤੋਂ ਪਹਲਾਂ -- ਕਿ ਹੁਣ ਕੋਈ ਵੀ $p \geq 3$ ਤੇ $q \geq 3$ ਸੰਭਵ ਹੋ ਜਾਂਦੇ ਨੈਂ।

ਸੋ ਰੈਲੈਟਿਵੀਟੀ ਭੰਣ ਤੌੜ ਦੀ ਹੈ ਓਹ ਅੱਖਾਣ ਕਿ ਸਿਰਫ਼ ਪੰਜ ਰੈਗੁਲਰ ਸੌਲਿਡ ਹੀ ਹਨ ! ਅੱਗੇ ਜਿੰਵੇਂ A_5 ਉਤਪਣ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਆਈਕੋਸਾਹੈਡਰਣ $\{3, 5\}$ ਤੋਂ, ਫ਼ਾਇਨਾਇਟ ਗਰੁਪਸ ਦੇ ਲਸ਼ਕਰ ਹੀ ਖੜੇ ਹੋ ਜਾਂਦੇ ਨੇ ਇਹ ਸਭ $\{p, q\}$ ਤੋਂ। ਜਿਨਹਾਂ ਵਿਚ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹਨ, ਸਭ ਫ਼ਾਇਨਾਇਟ ਸਿੰਮਪਲ ਗਰੁਪ ! ਕਿਉਂਕਿ ਜਾਪਦਾ ਹੈ (ਅਰਥ ਮੈਂ ਇਹ ਪਰਚੇ ਪੂਰੇ ਪੜੇ ਨਹੀਂ) ਇਹ ਕੌਰੌਲੈਰੀ ਹੈ ਓਹਨਾਂ ਦੇ ਕਥਿਤ (ਅਰਥ ਕਿਸੀ ਨੇ ਵੀ ਇਹ ਸਭ ਪਰਚੇ ਪੂਰੇ ਪੜੇ ਨਹੀਂ!) ਕਲਾਸੀਫ਼ਿਕੇਸ਼ਨ ਦੀ ਕਿ ਕੋਈ ਫ਼ਾਇਨਾਇਟ ਸਿੰਮਪਲ ਗਰੁਪ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਜੈਨੇਰੇਟ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਸਿਰਫ਼ ਦੋ ਐਲੀਮੈਂਟਸ ਤੋਂ, ਅਤੇ ਦੋ ਡਾਈਮੈਨਸ਼ਨਲ ਰੈਲੇਟਿਵੇਟੀ ਇੰਜ ਬਣਾਂਦੀ ਹੈ, ਸਾਰੇ ਫ਼ਾਇਨਾਇਟ ਗਰੁਪ ਜਿਨਹਾਂ ਨੂੰ ਦੋ ਐਲੀਮੈਂਟਸ ਜੈਨੇਰੇਟ ਕਰਦੇ ਹਨ।

ਹੁਣ ਇਹ ਤਾਂ ਆਪਾਂ ਕਿਹ ਨਹੀਂ ਸਕਦੇ ਦੇ ਕਿ ਕਿਸ ਹਦ ਤਕ ਇਹ ਸੱਭ ਖ਼ੁਦ ਗਾਲਵਾ ਨੇ ਹੀ ਭਾਂਪ ਲਿਆ ਸੀ, ਪਰ ਜ਼ਰੁਰ, ਯੌਰਦਾਂ ਨੇ ਓਹਦੇ ਕੰਮ ਦੀ ਜੋ ਲੰਬੀ ੧੮੭੦ ਚ ਵਿਆਖੇਆ ਛਾਪੀ ਸੀ, ਓਹਦੇ ਸਫ਼ੇ ੩੮੦ ਉੱਤੇ ਦਿਤਾ ਹੋਏਆ ਹੈ, ਇਕ ਤਰੀਕਾ ਹਰ ਇਕੁਏਸ਼ਨ ਨੂੰ ਹਲ ਕਰਣ ਦਾ, ਐਸੀਆਂ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨਜ਼ ਨਾਲ, ਜਿਨਹਾਂ ਦਿਆਂ ਸੀਮਿਟਰੀਜ਼ ਇਕ ਖਾਸ ਰੈਲੈਟਿਵਿਸਿਟਿਕ ਟਾਏਲਿੰਗ ਦਿਆਂ ਹਨ!

ਰਾਜ਼ ਇਸ ਸਭ ਦਾ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਦੋ-ਡਾਈਮੈਨਸ਼ਨਜ਼ਲ ਰੈਲੈਟਿਵਿਟੀ ਸ਼ੁਰੂ ਤੋਂ ਹੀ ਬੰਧੀ ਹੋਈ ਹੈ ਥੀਓਰੀ ਓਫ਼ ਇਕੁਏਸ਼ਨਜ਼ ਨਾਲ ਕਿਉਂਕਿ - ਅਗਲਾ ਨੋਟ - ਇਕ ਡਿਸਕ ਦੀ ਰੈਲੇਟਿਵਿਸਟਿਕ ਜੀਓਮੈਟਰੀ ਅਤੇ ਓਹਦੇ ਬਾਓਂਡਰੀ ਸਰਕਲ ਦੀ ਬੇਬੀ ਜੀਓਮੈਟਰੀ $\mathcal{G}$ ਇਕੋ ਹੀ ਹਨ !



੫੩. ਯਾਦ ਰਹੇ ਕਿ $\mathbb{R}P^1$ ਦੇ ਐਲੀਮੈਂਟਸ ਹਨ $\mathbb{R}^2$ ਦੀ ਓਰੀਜਨ ਚੋਂ ਲੰਘਦੀਆਂ ਰੇਖਾਂਵਾਂ। ਸੋ ਹਰ ਇਕ ਨੂੰ ਕਟ ਕੇ ਐਸੀ ਰੇਖਾ L ਨਾਲ ਜੋ ਇਹਦੇ ਵਿਚੋਂ ਨਹੀਂ ਲੰਘਦੀ -- ਜਿੰਵੇਂ ਚਿਤੱਰ ਦੀ ਰੇਖਾ $t = 1$, ਓਰੀਜਨ ਚੋਂ L ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਲਾਇਨ ਇਹਨੂੰ ∞ ਵਿਚ ਕੱਟੇਗੀ -- ਦਿੰਦੀ ਹੈ, ਆਈਸੋਮੋਰਫ਼ਿਜ਼ਮ ਬੇਬੀ ਜੀਓਮੈਟਰੀ $(\mathbb{R}P^1, \mathcal{G})$ ਅਤੇ ਪੂਰੀ ਲਾਇਨ $\widehat{L} = L \cup \infty$ ਦੀ ਮੋਬੀਅਸ ਜੀਓਮੈਟਰੀ ਦੀ :-

ਕਿਉਂਕਿ $\mathcal{G}$ ਦੇ $\mathbb{R}^2$ ਦੀ ਲੀਨੀਅਰ ਆਈਸੋਮੋਰਫ਼ਿਜ਼ਮ $(x, t) \mapsto (ax + bt, cx + dt)$ ਤੋਂ ਉੱਤਪਣ ਐਲੀਮੈਂਟ ਨਾਲ ਬੰਧੀ $\widehat{L}$ ਦੀ ਟਰਾਂਸਫ਼ੋਰਮੇਸ਼ਨ $(x, 1) \in L$ ਨੂੰ ∞ ਜੇ $cx + d = 0$, ਯਾਂ ਫ਼ੇਰ $(\frac{ax+b}{cx+d}, 1)$ ਉੱਤੇ ਮੈਪ ਕਰਦੀ ਹੈ; ਸੋ ∞ ਨੂੰ ∞ ਤੇ ਜੇ $c = 0$, ਯਾਂ ਫ਼ੇਰ $(\frac{a}{c}, 1)$ ਤੇ। ਸੋ ਇਹ ਕੌਮਪੋਜ਼ਿਸ਼ਨ ਹੀ ਹੈ ਯੁਕਲੀਡੀਅਣ ਆਈਸੋਮੈਟਰੀਜ਼ $(x, 1) \mapsto (\pm x + \lambda, 1)$ ਤੇ ਹੋਮੋਥੈਟੀਜ਼ $(x, 1) \mapsto (\mu x, 1), \mu > 0$

ਜੋ ∞ ਨੂੰ ਫ਼ਿਕਸਡ ਰਖਦੇ ਹਨ, ਅਤੇ ਯੂਨਿਟ ਸਰਕਲ ਚ ਰੈਫ਼ਲੈਕਸ਼ਨ ਯਾਂ ਇਨਵਰਸ਼ਨ $(x,1) \leftrightarrow (\frac{1}{x},1)$ ਦੀ ਜੋ $(0,1)$ ਅੱਤੇ ∞ ਦੀ ਅਦਲਾ ਬਦਲੀ ਕਰ ਦਿੰਦੀ ਹੈ। $\square$

ਐਵੇਂਹੀ, ਕਿਸੀ ਵੀ ਪੂਰੀ ਯੁਕਲੀਡੀਅਨ ਸਪੇਸ $\widehat{E} = E \cup \infty$ ਦੀ ਮੋਬੀਅਸ ਜੀਓਮੈਟਰੀ ਡੀਫਾਇਨ ਕਰਦੇ ਹਨ, ਸਭ ਕੌਮਪੋਜ਼ੀਸ਼ਨਜ਼ E ਦਿਆਂ ਆਈਸੋਮੈਟਰੀਜ਼ ਅਤੇ ਇਕ ਮਿਥੇ ਓਰੀਜਨ ਤੋਂ ਰੇਜ਼ ਦੀਆਂ ਹੋਮੋਥੈਟੀਜ਼ $x \mapsto \mu x$ ਜੋ ਸਾਰੇ ∞ ਨੂੰ ਫ਼ਿਕਸਡ ਹੀ ਰਖਦੇ ਹਨ, ਅਤੇ ਇਕਲੌਤੀ ਇਨਵਰਸ਼ਨ $x \leftrightarrow \frac{1}{x}$ ਇਹ ਸਭ ਰੇਜ਼ ਦੀ, ਜੋ ਇਸ ਓਰੀਜਨ ਅਤੇ ∞ ਦੀ ਅਦਲਾ ਬਦਲੀ ਕਰਦੀ ਹੈ।

ਯਾਂ ਫ਼ੇਰ ਜ਼ਿਆਦਾ ਖਿਚਾਉ ਅਲਫ਼ਾਜ਼ਾਂ ਵਿਚ, ਸਭ ਕੋਮਪੋਜ਼ੀਸਨਜ਼ ਕੋਡਾਈਮੈਨਸ਼ਨ ਵਨ ਚਪਟੇ ਯਾਂ ਗੋਲ ਸ਼ੀਸ਼ੇਆਂ ਚ ਰੈਫ਼ਲੈਕਸ਼ਨਜ਼ ਦੇ :- ਯੁਕਲਿਡੀਅਨ ਆਈਸੋਮੈਟਰੀਜ਼ ਲਈ ਚਪਟੇ ਹੀ ਕਾਫ਼ੀ ਹਨ. ਮਸਲਣ ਦੋ ਪੈਰੇਲੈਲ ਚਪਟੇਆਂ ਚ ਰਿਫ਼ਲੇਕਸ਼ਨਜ਼ ਦੀਆਂ ਕੌਮਪੋਸੀਸ਼ਨਜ਼ ਹਨ ਸਾਰੀਆਂ ਟਰਾਂਸਲੇਸ਼ਨਜ਼। ਅਤੇ ਦੋ ਕੌਨਸੈਂਟਰਿਕ ਗੋਲ ਸ਼ਿਸ਼ੇਆਂ ਚ ਰੇਫ਼ਲੇਕਨਜ਼ ਦਿਆਂ ਕੌਮਪੋਜ਼ੀਸ਼ਨਜ਼ ਸਾਰੀਆਂ ਹੋਮੋਥੈਟੀਜ਼। ਕਿਸੀ ਬਿੰਦੂ ਗਿਰਦ ਯੂਨਿਟ ਸਫ਼ੀਅਰ ਨੂੰ ਆਪਾਂ ਇਕ ਹੋਮੋਥੈਟੀ ਤੇ ਟਰਾਂਸਲੇਸ਼ਨ ਦਵਾਰਾ ਮੈਪ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿਸੀ ਵੀ ਗੋਲ ਸ਼ੀਸ਼ੇ ਉਤੇ, ਸੋ ਇਕੋ ਇਨਵਰਸ਼ਨ ਦੇ ਕੌਨਜੁਗੇਟ ਹਨ ਸਾਰੇ ਗੋਲ ਰੈਫ਼ਲੈਕਸ਼ਨਜ਼। $\square$

ਅਗੇ, ਸਾਰੇ ਸ਼ੀਸ਼ੇਆਂ--ਚਪਟੇ ਯਾਂ ਕੋਈ ਵੀ ਰੇਡੀਅਸ ਦੇ ਗੋਲ--ਦੀ ਅਹਮੀਅਤ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। ਇਕ ਗੋਲ ਵਿਚ ਰਿਫਲੈਕਸ਼ਨ ਓਹਦੇ ਸੈਂਟਰ ਚੋਂ ਲੰਘਦੇ ਸਾਰੇ ਸਫ਼ੀਅਰਜ਼ ਨੂੰ ਬਣਾਂ ਦਿੰਦੀ ਹੈ ਚਪਟੇ। ਅਤੇ ਜਿਹੜੇ ਓਹਨੂੰ ਟੈਂਜੈਂਟ ਵੀ ਹਨ ਓਹ ਬਣ ਜਾਂਦੇ ਹਨ ਟੈਂਜੈਂਟ ਚਪਟੇ। ਪਲੇਨਲੀ ਪਲੇਨ ਜੀਓਮੈਟਰੀ ਕਾਫ਼ੀ ਹੈ ਇਹ--ਤੇ ਐਂਵੀ ਹੀ ਐਸਾ ਹੋਰ ਨਿਕ ਸੁਕ--ਚੈਕ ਕਰਣ ਵਾਸਤੇ : $\widehat{L}$ ਦਾ ਇਮੇਜ ਹੈ $\mathbb{R}^2$ ਦਾ ਯੂਨਿਟ ਸਰਕਲ S^1 ਜੇ ਅਸੀਂ ਸੈਂਟਰ $-T$ ਤੇ ਰੇਡੀਅਸ 2 ਦੇ ਗੋਲ ਸ਼ੀਸ਼ੇ ਵਿਚ ਰੀਫ਼ਲੈਕਟ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :-

ਗੋਲ ਸ਼ੀਸ਼ਾ ਅਦਲ ਬਦਲ ਦਿੰਦਾ ਹੈ ਰੇਜ਼ ਦੇ P, P' ਜਿਨਹਾਂ ਦੀ ਦੂਰੀ ਹੈ x ਤੇ $\frac{1}{x}$ ਜ਼ਰੱਬ ਰੇਡੀਅਸ, ਯਾਣੀ ਕਿ $\frac{CP}{CT} = \frac{CT}{CP'}$, ਯਾਂ ਫ਼ੇਰ $\angle CTP = \angle CP'T$। ਸੋ P ਰੇਖਾ L ਤੇ ਯਾਣੀ $\angle CTP = 90^\circ$ ਓਦੋਂ ਤੇ ਓਦੋਂ ਹੀ ਜਦੋਂ $\angle CP'T = 90^\circ$ ਯਾਣੀ P' ਵਿਆਸ CT ਵਾਲੇ ਚੱਕਰ ਉੱਤੇ ਹੈ। $\square$

ਸੋ ਕੁਝ ਖਾਸ ਨਹੀਂ ਹੈ ∞ ਬਾਰੇ, ਇਹ $\widehat{E}$ ਦੇ ਦੂਜੇ ਪੌਐਂਟਸ ਵਾਂਗ ਹੀ ਹੈ। ਤੇ ਬਿਲਕੁਲ ਜਿੰਵੇ ਇਹਦੇ ਵਿਚੋਂ ਲੰਘਦੇ ਸਾਰੇ ਸ਼ੀਸ਼ੇਆਂ, ਯਾਣੀ ਕਿ ਚਪਟੇਆਂ, ਵਿਚ ਰੈਫ਼ਲੈਕਸ਼ਨਜ਼ ਦਿੰਦੀਆਂ ਹਨ E ਦੀ ਯੁਕਲੀਡੀਅਣ ਜੀਓਮੈਟਰੀ, ਹਰ $\widehat{E}$ ਦੇ ਪੌਐਂਟ ਦੇ ਕੋਮਪਲੀਮੈਂਟ ਉੱਤੇ ਹੈ ਇਕ ਯੁਕਲੀਡੀਅਣ ਜੀਓਮੈਟਰੀ। ਮਸਲਣ ਇਸ ਪੌਐਂਟ ਤੇ ਟੈਂਜੈਂਟ ਦੋ ਸ਼ੀਸ਼ੇਆਂ ਵਿਚ ਰੈਫ਼ਲੇਕਸ਼ਨਜ਼ ਦੀ ਕੋਮਪੋਜ਼ੀਸ਼ਨ ਓਹਦੇ ਕੌਮਪਲੀਮੈਂਟ ਤੇ ਡੀਫ਼ਾਇਨ ਕਰਦੀ ਹੈ ਇਕ ਯੁਕਲੀਡੀਅਨ ਟਰਾਂਸਲੇਸ਼ਨ, ਵਗੈਰਾਂ।

ਇਹ ਪੌਐਂਟ ਕੌਮਪਲੀਮੈਂਟਸ ਦੇ ਯੁਕਲੀਡੀਅਨ ਡਿਸਟੈਂਸਿਜ਼ ਓਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਹੋਮੋਥੈਟੀਜ਼ ਪਰੀਜ਼ਰਵ ਨਹੀਂ ਕਰਦੇ ਪਰ ਮੋਬੀਅਸ ਟਰਾਂਸਫ਼ੋਰਮੇਸ਼ਨਜ਼ ਸਾਰੇ ਐਂਗਲ ਪਰੀਜ਼ਰਵ ਯਾਂ ਰੀਵਰਸ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਏਥੇ ਦੋ ਕਟਦੇ ਪਲੇਨਰ ਸਰਕਲਜ਼ ਯਾਂ ਲਾਇਣਾਂ ਦੀ ਗਲ ਹੋ ਰਹੀ ਹੈ, ਜੇ ਇਕੋ ਕਟ ਤਾਂ ਐਂਗਲ ਜ਼ੀਰੋ ਹੈ, ਜੇ ਨਹੀਂ ਤਾਂ ਇਹਨਾਂ ਵਿਚ ਦੋ ਬਰਾਬਰ ਉਲਟੇ ਐਂਗਲ ਹਨ, ਦੋ ਰੇਖਾਂਵਾਂ ਦੇ ਕੇਸ ਵਿਚ ∞ ਇਕ ਕਟ ਹੈ।

ਮੋਬੀਅਸ ਜੀਓਮੈਟਰੀ ਯੁਕਲੀਡੀਅਨ ਜੀਓਮੈਟਰੀ ਨੂੰ ਕੁਦਰਤੀ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਮੁਕੰਮਲ ਕਰਣ ਦੇ ਨਾਲ ਨਾਲ ਓਹਦੇ ਵਾਂਗ ਰਿਜਿਡ ਰਹਿੰਦੀ ਹੈ। ਭਾਵ $\widehat{E}$ ਦਾ ਇਹ ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਡਾਈਮੈਨਸ਼ਨ ਦੀ $\widehat{F}$ ਦਾ ਸਬਸੈਟ ਹੋਣਾ ਹੀ ਫ਼ਿਕਸ ਕਰ ਦਿੰਦਾਂ ਹੈ ਦੂਜੀ ਦਾ ਮੋਬੀਅਸ ਸਬਗਰੁਪ ਜੋ ਬਾਈਜੈਕਟਿਵਲੀ ਇਸ ਦਿਆਂ ਸਬ ਮੋਬੀਅਸ ਟਰਾਂਸਫ਼ੋਰਮੇਸ਼ਨਜ਼ ਇਨਡੀਉਸ ਕਰਦਾ ਹੈ :- ਕਿਉਕਿ $\widehat{E}$ ਦਾ ਕੋਈ ਸ਼ੀਸਾ, ਚਪਟਾ ਯਾਂ ਗੋਲ, ਇਕ ਤੇ ਇਕ ਹੀ ਪਰਪੈਂਡੀਕੁਲਰ $\widehat{F}$ ਦੇ ਸ਼ੀਸੇ ਦੀ $\widehat{E}$ ਨਾਲ ਇੰਟਰਸੈਕਸ਼ਨ ਹੈ। $\square$

ਮਸਲਣ $\widehat{L}$ ਦੇ ਮੋਬੀਅਸ ਗਰੁਪ ਨੂੰ ਆਪਾਂ ਮੱਣ ਸਕਦੇ ਹਾਂ $\widehat{\mathbb{R}^2}$ ਦਾ ਮੋਬੀਅਸ ਸਬਗਰੁਪ ਜੋ ਜੈਨੇਰੇਟ ਕਰਦੇ ਹਨ ਇਹਨੂੰ ਪਰਪੈਂਡੀਕੁਲਰ ਸਾਰੇ ਸ਼ੀਸ਼ੇ। ਸੋ ਰੈਫ਼ਲੈਕਟ ਕਰਕੇ ਰੈਡੀਅਸ 2 ਅਤੇ ਸੈਂਟਰ $-T$ ਦੇ ਸਰਕਲ ਵਿਚ, ਬੇਬੀ ਗਰੁਪ $\mathcal{G}$ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਮਣ ਸਕਦੇ ਹਾਂ $\widehat{\mathbb{R}^2}$ ਦਾ ਮੋਬੀਅਸ ਸਬਗਰੁਪ ਜੋ ਜੈਨੈਰੇਟ ਕਰਦੇ ਹਨ ਰੈਫ਼ਲੈਕਸ਼ਨ ਗੋਲ ਸੀਸ਼ੇਆਂ ਵਿਚ ਜੋ ਯੂਨਿਟ ਸਰਕਲ S^1 ਦੇ ਪਰਪੈਂਡੀਕੁਲਰ ਹਨ।

ਐਂਵੇਂ ਹੀ, ਮੋਬੀਅਸ ਜੀਓਮੈਟਰੀ ਉਤੇ ਕਿਸੀ ਗੋਲ n-ਸਫ਼ੀਅਰ ਦੇ, ਜੋ ਬੈਠਾ ਹੈ ਡਾਈਮੈਨਸ਼ਨ m ਦੀ ਯੁਕਲੀਡੀਅਣ ਸਪੇਸ ਵਿਚ, ਦਿੰਦੇ ਹਨ ਇਹਦੇ ਬਾਈਜੈਕਸ਼ਨ ਜੋ ਰੈਸਟਰਿਕਸ਼ਨਜ਼ ਹਨ ਇਹਨੂੰ ਪਰਪੈਂਡੀਕੁਲਰ ਸਾਰੈ $(m-1)$-ਸਫ਼ੀਅਰਜ਼ ਵਿਚ ਰੈਫ਼ਲੈਕਸ਼ਨਜ਼ ਦੇ। ਇਹ ਡੈਫ਼ੀਨੇਸ਼ਨ ∞ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਨਹੀਂ ਕਰਦੀ ਤੇ ਸ਼ੁਰੂ ਤੋਂ ਹੀ ਇਸ ਜੀਓਮੈਟਰੀ ਦੀ ਹੋਮੋਜੈਨੀਟੀ ਦਖਾਂਦੀ ਹੈ।

ਕੁਝ ਹੋਰ ਮੋਬੀਅਸ ਟਰਾਂਸਫ਼ੋਰਮੇਸ਼ਨ ਵੀ ਹਨ $\widehat{\mathbb{R}^m}$ ਦੇ ਜੋ ਇਸ S^n ਨੂੰ ਪਰੀਜ਼ਰਵ ਕਰਦੇ ਹਨ, ਪਰ ਜੇ $m = n + 1$ ਤਾਂ ਕੋਸ਼ੈਂਟ ਗਰੁਪ ਸਿਰਫ਼ $\mathbb{Z}_2$ ਹੈ, ਸਦਕੇ ਖੁਦ S^n ਵਿਚ $\widehat{\mathbb{R}^{n+1}}$ ਦੀ ਰੈਫ਼ਲੈਕਸ਼ਨ। ਮਤਲਬ S^n ਦੀ ਮੋਬੀਅਸ ਜੀਓਮੈਟਰੀ ਦਿੰਦੇ ਹਨ $\widehat{\mathbb{R}^{n+1}}$ ਦੇ ਸਾਰੇ ਟਰਾਂਸਫ਼ੋਰਮੈਸ਼ਨ ਜੋ ਨਾਂ ਸਿਰਫ਼ S^n ਪਰ ਇਹਦੇ ਕੌਮਪਲੀਮੈਂਟ ਦੇ ਦੋਨੋਂ ਕੋਮਪੋਨੈਂਟਸ ਨੂੰ ਵੀ ਪਰੀਜ਼ਰਵ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਜਿਹੜੀ $\mathbb{R}^{n+1}$ ਦੀ ਓਪਣ $(n+1)$-ਬੌਲ B^{n+1} ਦੀ ਬਾਉਂਡਰੀ S^n ਹੈ ਓਹਦੀ ਮੋਬੀਅਸ ਜੀਓਮੈਟਰੀ ਇਹ ਹੀ ਟਰਾਂਸਫ਼ੋਰਮੈਸ਼ਨਜ਼ ਦੀਆਂ ਓਹਦੇ ਉਤੇ ਰੈਸਟਰਿਕਸ਼ਨਜ਼ ਨਾਲ ਡੀਫ਼ਾਇਨ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਅਤੇ ਆਖਰ

S^n ਦੀ ਮੋਬੀਅਸ਼ ਜਮੈਟਰੀ ਨੂੰ ਆਪਾਂ ਮੰਨ ਸਕਦੇ ਹਾਂ B^{n+1} ਦੀ ਰੈਲੈਟਿਵਿਸਟਿਕ ਜਮੈਟਰੀ:- ਆਪਾਂ ਇਸ ਦੇ $\partial B^{n+1} = S^n$ ਨੂੰ ਪਰਪੈਂਡੀਕੁਲਰਲੀ ਕਟਦੇ ਸਾਰੇ ਦੇ ਸਾਰੇ ਕਰਵਡ ਸ਼ੀਸ਼ੇ ਯਕਦਮ ਬਗ਼ੈਰ ਓਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਬਾਉਂਡਰੀਜ਼ ਨੂੰ ਛੇੜੇ ਓਹ ਹਾਈਪਰਬੌਲਿਕ ਮੈਨੀਫ਼ੋਲਡਜ਼ (੨੦੧੨) ਵਾਲੀ ਜਾਦੂਈ ਰੈਡੀਅਲ ਸੈਲਫ਼ ਹੋਮੀਓਮੋਰਫ਼ਿਜ਼ਮ ਨਾਲ ਚਪਟੇ ਬਣਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਜਿਸ ਤੋਂ ਬਾਦ ਇਹਨਾਂ ਵਿਚ ਰੈਫ਼ਲੈਕਸ਼ਨਜ਼ ਬੌਲ ਤੇ ਕੋਨ ਨੂੰ ਪਰੀਜ਼ਰਵ ਕਰਣ ਵਾਲੀਆਂ ਲੀਨੀਅਰ ਮੈਪਸ ਦੀਆਂ ਰਿਸਟਰਕਿਸ਼ਨਜ਼ ਬਣ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ। $\square$

ਸੋ ਯੁਨਿਟ ਸਰਕਲ S^1 ਦੀ ਮੋਬੀਅਸ ਜਮੈਟਰੀ $\mathcal{G}$ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਆਈਡੈਂਟੀਫ਼ਾਈ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਯੁਨਿਟ ਓਪਣ ਡਿਸਕ B^2 ਦੀ ਰੈਲੈਟਿਵਿਸਟਿਕ ਜਮੈਟਰੀ ਨਾਲ। ਅਤੇ ਫ਼ੇਰ ਪਲੇਨ ਹੈ ਕਿ ਉਤਲੀ ਹੋਮੀਓਮੋਰਫ਼ਿਜ਼ਮ ਦੀ ਐਗਜ਼ਿਸਟੈਂਸ ਦਾ ਪਰੂਫ਼ ਇਸ ਪਲੇਨ ਕੇਸ ਵਿਚ ਦੇਣਾ ਹੀ ਕਾਫ਼ੀ ਹੈ। ਜੋ ਨਿਕਲਦਾ ਹੈ ਇਕ ਐਸੇ ਨਾਂ-ਜਾਦੂਈ ਤੇ ਨਾਂ-ਯਕਦਮ ਪਰੂਫ਼ ਤੋਂ ਓਹ ਅਸੀਂ ਅਗਲੇ ਨੋਟਾਂ ਵਿਚ ਵਿਚਾਰਾਂਗੇ।

੫੪. ਸਮੱਝ ਦੀ ਤੈਲਾਸ਼ ਵਿਚ ਅਸੀਂ ਇਕੋ ਚੀਜ਼ ਨੂੰ ਵੱਖਰੇ ਨਾਮ ਅਤੇ ਵੱਖਰੀਆਂ ਚੀਜ਼ਾਂ ਨੂੰ ਇਕੋ ਨਾਮ ਦਿੰਦੇ ਰਹਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਇਹ ਸ਼ਬਦਾਂ ਦੇ ਸਦਾ ਬਦਲਦੇ ਵਖਰੇ ਭਾਵਾਂ ਚ ਬਰੀਕਿਆਂ ਉਚਾਰਣ ਲਈ ਕੁਦਰਤੀ ਭਾਸ਼ਾ ਦੀ ਸਾਰਥਕ ਸ਼ਕਤੀ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ। ਪਰ ਹਾਂ ਬਿਚ ਬਿਚ ਇਹ ਤੇ ਓਹ ਨੂੰ ਜ਼ਿਆਦਾ ਫ਼ੌਰਮੈਲੀ ਡੀਫ਼ਾਇਨ ਕਰਕੇ ਸ਼ਕ ਨੂੰ ਘੱਟਾਣ ਲਈ ਪਰੁਫ਼ ਲਿਖਣੇ ਜ਼ਰੁਰੀ ਹਨ। ਕਿਨ੍ਹੀ ਦੂਰ ਮੈਂ ਆ ਗਿਆ ਹਾਂ ਸ਼ੁਰੁ ਤੋਂ ਚਲ ਕੇ ਚੀਜ਼ਾਂ ਨੂੰ (ਪੁਨਰ) ਸਮਝਨ ਵਿਚ ਇਸ ਕਾਰਟੀਸ਼ੀਅਣ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਦਾ ਨਿਰਨਾ ਤਾਂ ਤੋਹਾਡਾ ਹੈ। ਪਰ ਹੁਣ ਤੋਂ ਮੇਰਾ ਇਰਾਦਾ ਹੈ ਹੋਰ ਸਾਫ਼ ਕਰਣਾ ਕੁਝ ਸ਼ਬਦਾਂ ਦੀ ਖਾਸ ਅਤੇ ਸ਼ਾਇਦ ਤੋਹਾਡੇ ਲਈ ਅਜੀਬ ਵਰਤੋਂ ਜੋ ਮੇਰੀ ਲਈ ਲਾਭਦਾਇਕ ਹੋਈ ਹੈ ਇਸ ਤੈਲਾਸ਼ ਵਿਚ।

ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਣ ਰੈਲੈਟਿਵਿਸਟਿਕ ਸੰਕੇਤ ਕਰਦਾ ਹੈ ਯੁਕਲਿਡੀਅਣ ਜੀਓਮੈਟਰੀ ਦਾ ਇਕ ਓਪਣ ਸੈਟ ਉਤੇ ਕੁਦਰਤੀ ਬਦਲਾਵ ਜੋ ਕਰਣਾ ਬਣਦਾ ਹੈ ਜੇ ਸਮਝੋ ਅਸੀਂ ਓਹਦੇ ਅੰਦਰ ਕੈਦ ਹਾਂ। ਮੂਲ ਉਧਾਹਰਣ ਹੈ ਉਤਲੀ ਜਮੈਟਰੀ ਰੈਡੀਅਸ $c < \infty$ ਦੇ ਬੌਲ B^n ਦੀ, ਜੋ $n = 3$ ਲਈ ਆਪਣੇ ਕੋਨ ਦੀ ਐਸੀ ਹੀ ਜਮੈਟਰੀ ਨਾਲ ਸਪੈਸ਼ਲ ਰੈਲੈਟਿਵੀਟੀ ਵਿਚ ਇਸਤਮਾਲ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਅਤੇ ਕਿਸੀ n ਲਈ ਅਕਸਰ ਭਾਰੀ-ਭਾਰੀ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿਚ ਕਹੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ 'ਦੀ ਕਲਾਇਨ ਮੋਡੈਲ ਓਫ਼ n-ਡਾਈਮੈਨਸ਼ਨਲ ਹਾਈਪਰਬੌਲਿਕ ਜੀਓਮੈਟਰੀ'।

ਪਰ ਕਿਤੇ ਵਿਆਪਕ ਉਧਾਹਰਣ ਵੀ ਅਸੀਂ ਦੇਖ ਲੀਤੇ ਹਨ ਪੀ ਜੀ ਐਂਡ ਆਰ (੨੦੧੩) ਤੋਂ ਚਲਦੇਆਂ ਪਰਚੇਆਂ ਚ। ਲੈ ਲੋ ਕੌਈ ਓਪਣ U ਸੱਚ ਦੈਟ ਜੇ ਅਸੀਂ ਓਹਦੀ ਕੋਈ ਸੈਗਮੈਂਟ ਵਧਾਂਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਓਹ ਇਕ ਪਾਸੇ ਤੇ ਜ਼ਰੂਰ ਬਾਹਰ ਚਲੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ, ਸੋ ਹਰ ਸੈਗਮੈਂਟ ਦੀ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਕੇਈਲੀ ਲੰਬਾਈ ਹੈ, ਅਤੇ U ਦੇ ਦੋ ਪੌਐਂਟਸ ਵਿਚਕਾਰ ਰੈਲੈਟਿਵਿਸਟਿਕ ਡਿਸਟੈਂਸ ਹੈ ਇਨਫ਼ੀਮਮ ਸਾਰੇ ਗਿਣਤੀ ਦਿਆਂ ਸੈਗਮੈਂਟਸ ਤੋਂ ਬਣੇ ਜੋੜਦੇਆਂ ਰਸਤੇਆਂ ਦੀ ਕੁਲ ਕੇਈਲੀ ਲੰਬਾਈਆਂ ਦਾ।

ਮੁੜਦੇ ਫ਼ੇਰ ਹੋਮੋਜੀਨਸ ਬੌਲ ਜਮੈਟਰੀ ਵਲ, ਮੇਰੇ ਖਿਆਲ ਚ ਇਕ ਮਾਇਕਰੋਫ਼ਿਜ਼ੀਕਲ B ਦੀ ਮੋਬੀਅਸ ਜਮੈਟਰੀ ਨੂੰ ਵੀ ਰੈਲੈਟਿਵਿਸਟਿਕ ਹੀ ਮਣਨਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਮਾਇਕਰੋ ਦੁਣੀਆ ਦੇ ਬਾਸ਼ਿੰਦੇਆਂ ਦੇ ਲਈ ਤਾਂ ਸ਼ਾਇਦ ਨਹੀਂ, ਪਰ ਇਕ ਮੈਕਰੋ ਓਬਜ਼ਰਵਰ ਲਈ ਜੋ ਇਸ ਛੋਟੀ ਛੁਪੀ ਦੁਣੀਆ ਨੂੰ ਬਾਹਰ ਤੋਂ ਸਮਝਣ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਓਸ ਲਈ ਓਹ ਸੇਲਫ਼ ਹੋਮੀਓਮੋਰਫ਼ਿਜ਼ਮ ਨਾਂ ਦੇ ਬਰਬਰ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਇੰਟਰਫ਼ੇਸ ਕਰਦੇ ਸਫ਼ੀਅਰ ਦੀ ਮੋਬੀਅਸ ਜਮੈਟਰੀ ਨੂੰ ਤੇ ਇਹ ਨਹੀਂ ਛੇੜਦੀ, ਸੋ ਸਦਕੇ ਰੀਜਿਡੀਟੀ ਦੇ, ਮੁਮਕਿਣ ਹੈ ਇਹ ਕਵਾਂਟਮ ਫ਼ਿਜ਼ੀਸਿਜ਼ਟ ਆਪਣੇ ਇਕ ਵੀਸ਼ੇਸ਼ ਮੋਬੀਅਸ ਸਬਗਰੁਪ ਦੇ ਡਿਸਕਰੀਟ ਸਬਗਰੁਪਾਂ ਵਿਚ ਕਦੇ ਕਦਾਈਂ ਸੁਣ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜੋ ਇਸ ਮਾਈਕਰੋ ਦੁਨੀਆ ਵਿਚ ਵਾਪਰ ਰਿਹਾ ਹੈ।

ਰਹੱਸਮਈ ਹੈ ਕਿਣੀ ਹੀ ਵਾਰ ਜੋ ਮੈਂ ਸੋਚ ਹੀ ਰਿਹਾ ਸੀ ਕਿਸੀ ਨੇ ਕਿਉਂ ਨਹੀਂ ਕਿਹਾ ਅਜੇ ਤਕ, ਪਤਾ ਲੱਗਾ ਮੈਨੂੰ ਬਾਦ ਵਿਚ ਓਹ ਗਲ ਤਾਂ ਆਰਨੌਲਡ ਕਹਿ ਬੈਠਾ ਸੀ ਪਹਲਾਂ। ਪਰ ਓਹਦਾ 'ਮੈਥੇਮੈਟਿਕਸ ਇਜ਼ ਆ ਪਾਰਟ ਓਫ਼ ਫ਼ਿਜ਼ਿਕਸ' ਤਾਂ ਮੈਨੂੰ ਸਿਰਫ਼ ਇਸੇ ਲਈ ਹੀ ਕਬੂਲ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਮੇਰੇ ਲਈ ਫ਼ਿਜ਼ਿਕਸ ਦਾ ਮਤਲਬ ਹੈ ਕਾਰਟੀਸ਼ੀਅਨ ਫ਼ਿਜ਼ਿਕਸ।

ਵਰਨਣਯੋਗ ਹੈ ਫ਼ੇਰ ਇਸ ਸੰਧਰਭ ਵਿਚ ਕਿੰਵੇ ਇਕ ਕਾਰਟੀਸ਼ੀਅਨ ਮੋਸ਼ਨ ਦੇ ਕਾਰਣ ਤੇ ਓਹਦੇ ਅੰਦਰ ਹੀ ਸਭ ਕਲੋਜ਼ਡ ਮੈਨੀਫ਼ੋਲਡਜ਼ ਦਿੱਖ ਜਾਂਦੇ ਹਨ, ਆਪਣੀਆਂ ਭਾਂਤ ਭਾਂਤ ਦੀਆਂ ਜੀਉਣਾਂ ਜਿੰਦੇ, ਅਤੇ ਇਸ ਮੋਸ਼ਨ ਦਾ ਰੈਲੇਟਿਵਿਸਟਿਕ ਹੋਣਾ ਇਹਨਾਂ ਉਤੇ ਲਿਪਸਸ਼ਿਟਜ਼ ਚਾਰਟਸ ਦੇ ਦਿੰਦਾ ਹੈ, ਪਰ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ ਤੋਹਾਂਨੂੰ ਅਜੇ ਦਸਣਾ ਕਿੰਵੇ ਇਹ, ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਜਨਮ ਦੇਣ ਵਾਲੀ ਹਲ ਚਲ ਹੀ, ਇਹਨਾਂ ਮੈਨੀਫ਼ੋਲਡਜ਼ ਉੱਤੇ ਸਮੂਦਿੰਗ ਓਪੇਰੇਟਰਜ਼ ਵੀ ਡੀਫ਼ਾਇਨ ਕਰਦੀ ਹੈ, ਕਾਰਣਵਸ਼ ਜਿਸ ਦੇ ਅਤੀਯਾਹ ਤੇ ਹੋਰਾਂ ਦੇ ਇੰਡੇਕਸ ਫ਼ੌਰਮੂਲੇ ਵੀ ਇਹ ਕਾਰਟੀਸ਼ੀਅਣ ਫ਼ਿਜ਼ਿਕਸ ਦੇ ਦਾਇਰੇ ਦੇ ਅੰਦਰ ਆ ਜਾਂਦੇ ਹਨ।

ਜੋ ਰੀਸੋ ਰੀਸੀ ਅਲਾਪ ਜੱਪੇਆਂ ਜਾਂਦਾਂ ਹੈ ਆਧੁਨਿਕ ਉਚ ਸਟੈਂਡਰਡ ਓਫ਼ ਰਿਗਰ ਬਾਰੇ ਵਿਚ ਆਰਨੋਲਡ ਦਾ ਖੁਸ਼ਕ ਜਵਾਬ 'ਐਜ਼ ਫ਼ਾਰ ਐਜ਼ ਆਈ ਨੋ, ਦਾ ਕਰੀਟੀਰੀਆ ਓਫ਼ ਰਿਗਰ ਹੇਵ ਨੋਟ ਚੇਣਜੱਡ ਸਿੰਸ ਦਾ ਟਾਇਮ ਓਫ਼ ਯੁਕਲਿਡ' ਤਾਜ਼ੀ ਹਵਾ ਦੇ ਝੋਂਕੇ ਵਾਂਗ ਸੀ। ਯੁਕਲਿਡ ਦਿਆਂ ਤੇਹਰਾਂ ਕਿਤਾਬਾਂ ਅਨਮੋਲ ਹਨ ਕਿਉਂਕਿ ਜੋ ਕਾਢਾਂ ਓਹਨਾਂ ਵਿਚ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹਨ ਓਹ ਹੀ ਹੁਨ ਅਸੀ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਜੋ ਓਸ ਕਲਚਰ ਦੇ ਗਣਿਤਕਾਰਾਂ ਨੇ ਓਸ ਟਾਇਮ ਤਕ ਖੋਜ ਲਿਤਾ ਸੀ। ਜਿੰਵੇ ਕਿ ਓਹਦੀ ਪੰਜਵੀਂ ਤੇ ਸਭ ਤੋਂ ਡੂੰਗੀ ਕਿਤਾਬ ਸਾਨੂੰ ਜਾਨੂੰ ਕਰਾਂਦੀ ਹੈ ਯੋਡੋਕਸਸ ਦੇ ਕੁਝ ਕਮ ਨਾਲ ਜੋ ਓਸਤੋਂ ਵੀ ਜਿਆਦਾ ਰਿਗੋਰਸ ਸੀ।

ਪਰ ਅਫ਼ਸੋਸ ਜਲਦ ਹੀ ਇਹਨਾਂ ਕਿਤਾਬਾਂ ਦੇ ਬਹੁਮੁੱਲੀ ਸਬਸਟੈਂਸ ਨੂੰ ਛੱਡ ਸਾਰਾ ਫ਼ੋਕੱਸ ਯੁਕਲਿਡ ਦਾ ਸਟਾਇਲ ਹੀ ਬਣ ਗਿਆ, ਯਾਣੀ ਕਿ, ਓਹਦਾ ਐਕਸੀਓਮੈਟਿਕ ਮੈਥਡ। ਐਥੇ ਵੀ ਸ਼ਾਇਦ ਜੇ ਫ਼ੋਕੱਸ ਕੁਝ ਘਟ ਹੁੰਦਾ ਤਾਂ ਕਿਤੇ ਪਹਲਾਂ ਦਿਖ ਜਾਂਦਾਂ ਕਿ, ਯੁਕਲਿਡ III.36 ਸਾਨੂ ਦਿੰਦੀ ਹੈ ਇਕ ਹੋਮੋਜੀਨਸ ਜਮੈਟਰੀ ਜਿਸ ਵਿਚ ਯੁਕਲਿਡ ਦਾ ਪੰਜਵਾਂ ਪੋਸਟੁਲੇਟ ਸਹੀ ਨਹੀਂ :-

ਲੇ ਲੋ ਓਪਣ ਡਿਸਕ ਦੀ ਸਰਕੁਲਰ ਆਰਕ ਬਾਉਂਡਰੀ ਨੂੰ ਨੋਰਮੈਲੀ ਕਟਦੀ। ਓਹਦਾ ਸੈਂਟਰ O ਇਹ ਦੋ ਕਟਾਂ ਤੇ ਬਾਉਂਡਰੀ ਦਿਆਂ ਟੈਂਜੈਂਟਸ ਦਾ ਇੰਟਰਸੈਕਸ਼ਨ ਡਿਸਕ ਤੋਂ ਬਾਹਰ ਹੈ ਅਤੇ ਓਹਦੀ ਰੈਡੀਅਸ r ਇਹ ਟੈਂਜੈਂਟਸ ਤੇ ਲੰਬਾਈ ਹੈ। ਜਿਸ ਯੁਕਲਿਡ ਦੀ ਪਰੌਪੋਜ਼ਿਸ਼ਨ ਦਾ ਹਵਾਲਾ ਅਸੀਂ ਦਿਤਾ ਹੇ ਓਹ ਦਸਦੀ ਹੈ ਕਿ O ਤੋਂ ਨਿਕਲਦੀ ਤੇ ਇਹ ਟੈਂਜੈਂਟਸ ਵਿਚ ਰਹਿੰਦੀ ਕੋਈ ਰੇਖਾ ਜੇ ਡਿਸਕ ਦੀ ਬਾਉਂਡਰੀ ਨੂੰ P ਅਤੇ P' ਤੇ ਕਟਦੀ ਹੈ ਤਾਂ $OP \cdot OP' = r^2, i.e., OP/r = r/OP', i.e.,$ ਬਾਉਂਡਰੀ ਤੇ ਡਿਸਕ ਪਰੀਜ਼ਰਵ ਕਰਦੀ ਹੈ ਰੈਫ਼ਲੈਕਸ਼ਨ ਇਸ ਸੈਂਟਰ O ਅਤੇ ਰੇਡੀਅਸ r ਵਾਲੇ ਗੋਲ ਸ਼ੀਸ਼ੇ ਵਿਚ।

ਇਹ ਸਭ, ਅਤੇ ਵਿਆਸਾਂ ਵਿਚ, ਰੈਫ਼ਲੈਕਸ਼ਨਜ਼ ਜੈਨੇਰੇਟ ਕਰਦੀਆਂ ਹਨ 'ਬੇਬੀ ਗਰੁਪ' $\mathcal{G}$ ਜੋ ਡਿਸਕ ਦੇ ਪੌਐਂਟਾਂ ਅਤੇ ਲਾਇਣਾਂ, ਯਾਣੀ ਕਿ, ਇਹ ਆਰਕਸ ਅਤੇ ਵਿਆਸਾਂ ਤੇ ਟਰਾਜ਼ੀਟਿਵਲੀ ਐਕਟ ਕਰਦਾ ਹੇ। ਜ਼ਾਹਿਰ ਹੈ ਕਿ ਪੈਰੈਲੈਲ ਪੋਸਟੁਲੇਟ ਹੁਨ ਸਹੀ ਨਹੀਂ, ਪਰ ਯੁਕਲਿਡ ਦਿਆਂ ਇਸ ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਨਹੀਂ ਕਰਦਿਆਂ ਸਭ ਦਲੀਲਾਂ ਇਸ ਜਮੈਟਰੀ ਵਿਚ ਵੀ ਵਾਜਿਬ ਹਨ। □

ਦਰਅਸਲ ਕਿਸੀ ਵੀ O ਲਈ, ਜੋ ਡਿਸਟੈਂਸ R ਤੇ ਹੈ ਸਾਡੀ ਰੈਡੀਅਸ c ਵਾਲੀ ਡਿਸਕ ਦੇ ਸ਼ੈਂਟਰ ਤੋਂ, ਇਹ ਸਹੀ ਹੈ ਕਿ $OP \cdot OP' = R^2 - c^2$:- ਕਿਉਂਕਿ ਬੱਚਦਾ ਕੇਸ $R < c$ ਦਿੰਦੀ ਹੈ ਓਸ ਤੋਂ ਜਲਦ ਪਹਲੀ ਪਰੌਪੋਜ਼ੀਸ਼ਨ ਯੁਕਲਿਡ III.35. □

ਜੇ ਉਸੀ ਲੈਵਲ ਦਾ ਪਰ ਘਟ ਭਾਰਾ ਵਰਨਣ ਉਪਲੱਬਧ ਹੁੰਦਾ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਓਸ ਗਣਿਤ ਦਾ ਹੋਰ ਅੱਛਾ ਅੰਦਾਜ਼ਾ ਹੋਣਾ ਸੀ, ਕਿਉਂਕਿ ਸ਼ਰਤਿਆ ਕਿਣੀਆਂ ਹੀ ਪਿਆਰੀਆਂ ਖੋਜਾਂ ਨੂੰ ਇਹਦੇ ਐਕਸੀਓਮੈਟਿਕ ਮੈਥਡ ਕਾਰਣ ਕੋਈ ਜਗਹ ਨਹੀਂ ਮਿਲੀ ਹੋਣੀ ਯੁਕਲਿਡ ਦੇ ਐਲੀਮੈਂਟਸ ਵਿੱਚ।

ਮਸਲਨ, ਜੇ ਕੋਈ ਵੀ ਕਵਾਡਰੀਲੈਟਰਲ ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਅਸੀਂ ਬਾਰ ਬਾਰ ਸਾਈਡਾਂ ਦੇ ਮਿਡ ਪੌਐਂਟਸ ਗਿਰਦ ਅਧ-ਘੁਮੀ ਜਾਂਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਓਸ ਦਿਆਂ ਨਕਲਾਂ ਨਾਲ ਸਾਰੇ ਪਲੇਨ ਦੀ ਟਾਈਲਿੰਗ ਬਣ ਜਾਂਦੀ ਹੈ :- ਪਰਯੋਗ ਰਾਂਹੀ ਇਹ ਚੈਕ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਕਿਸੀ ਵੀ ਕਵਾਡਰੀਲੈਟਰਲ ਦੇ ਕੌਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਚਾਰ ਰਾਇਟ ਐਂਗਲਜ਼ ਹੈ, ਪਰ ਪੁਰੇ ਪਰੂਫ਼ ਲਈ ਪਲੇਨ ਦੀ ਸਿੰਪਲ ਕੋਨੈਕਟੀਵੀਟੀ ਦਾ ਵੀ ਇਸਤਮਾਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। □

ਸੋ, ਹਰ ਡਿਗਰੀ ਚਾਰ ਦੀ ਹੋਮੋਜੀਨਸ ਇਕੁਏਸ਼ਨ ਜਿਹਦੇ ਭਿੰਨ ਐਕਸਟੈਂਡਿਡ ਰੀਅਲ ਰੂਟ ਹਨ ਨਾਲ ਬੰਧੀ ਹੋਈ ਹੈ ਇਕ ਐਸੀ ਪਲੇਨ ਦੀ ਕਵਾਡਰੀਲੈਟਰਲ ਟਾਈਲਿੰਗ, ਦੇਖੋ ਤਸਵੀਰ :- ਟਾਈਲਿੰਗ ਦਾ ਬੀਜ ਹੈ ਕਵਾਡਰੀਲੈਟਰਲ ਜਿਸ ਦੀਆਂ ਵਰਟੀਸਿਜ਼ ਹਨ ਯੁਨਿਟ ਸਰਕਲ ਦੇ ਪੌਐਂਟ ਜੋ ਰੈਡੀਅਸ 2 ਅਤੇ ਸੈਂਟਰ $(-1, 0)$ ਵਾਲੇ ਗੋਲ ਸ਼ੀਸ਼ੇ ਚ ਰੈਫ਼ਲੈਕਸ਼ਨ ਥੱਲੇ ਲਾਇਨ $\widehat{L}$ ਉਤੇ ਹਨ ਇਹ ਚਾਰ ਰੂਟ। □

ਇਸੀ ਬੀਜ ਕਵਾਡਰੀਲੈਟਰਲ--ਯਾਂ ਕਿਸੀ ਵੀ ਯੁਨਿਟ ਸਰਕਲ ਚ ਇਨਸਕਰਾਬਿਡ ਪੌਲੀਗੌਨ ਜਿਹਦੀਆਂ ਤਿਨ ਯਾਂ ਜਿਆਦੀਆਂ ਭੁਜਾਂਵਾਂ ਹਨ--ਤੋਂ ਚਲਦੇ ਆਪਾਂ ਯੁਨਿਟ ਡਿਸਕ ਦੀਆਂ ਸਾਈਡਸ ਵਿਚ ਰੈਲੈਟਿਵਿਸਟਿਕ ਰੈਫ਼ਲੈਕਸ਼ਨ ਵਾਰ ਵਾਰ ਵਰਤਦੇ ਹੋਏ ਯੁਨਿਟ ਡਿਸਕ ਨੂੰ ਵੀ ਪੂਰਾਂ ਸਬਡੀਵਾਇਡ ਕਰ ਸਕਦੇ ਸਾਂ, ਪਰ ਹੁਣ

ਇਹ 'ਟਾਈਲਾਂ' ਕੁਝ ਬੋਗਸ ਹਨ, ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਵਰਟਿਸਿਜ਼ ਤਾਂ ਓਪੈਣ ਡਿਸਕ ਤੋਂ ਬਾਹਰ ਹਨ, ਇਸ ਡਿਸਕ ਦੇ ਵਿਭਾਜਣ ਦੇ ਸੈਲ ਰੈਲੈਟਿਵਿਸਟਿਕਲੀ ਕੌਂਗਰੂਅੰਟ ਤਾਂ ਹਨ ਪਰ ਕੋਮਪੈਕਟ ਨਹੀਂ।

ਇਸ ਤੋਂ ਇਸ਼ਾਰਾ ਲੈਂਦੇ, ਅਸੀਂ $n \geq 5$ ਲਈ ਇਨਸਕਰਾਈਬਡ ਮੋਬੀਅਸ n–ਗੋਨ ਦੀਆਂ ਸਾਈਡਸ ਨੂੰ ਕੁਝ ਸਿਧਾਂ ਹੀ ਕਰਾਂਗੇ, ਮੱਤਲਬ, ਓਹ ਹੁਣ ਇਕ ਰੇਢੀਅਸ $c > 1$ ਦੇ ਕੌਂਸੈਂਟਰਿਕ ਓਪੈਣ ਡਿਸਕ ਦਿਆਂ 'ਸੈਗਮੈਂਟਸ' ਹੋਨ ਗਿਆਂ, ਵਿਦ c ਸੱਚ ਦੇਟ ਇਹ ਨੰਵੇਂ ਮੋਬੀਅਸ n–ਗੌਨ ਦੇ ਐਂਗਲਜ਼ ਦਾ ਜੋੜ ਐਗਜ਼ੈਕਟਲੀ 2π ਹੈ, ਤੇ ਫ਼ੇਰ ਇਸ ਬੀਜ ਤੋਂ ਚਲਦੇ ਇਹ, ਇਕ ਵੱਡੀ ਰੇਡੀਅਸ $c > 1$ ਦੀ ਓਪੈਣ ਡਿਸਕ ਨੂੰ ਬਾਰ ਬਾਰ ਮੋਬੀਅਸ਼ ਹਾਫ਼–ਟੱਰਨਜ਼ ਵਰਤਦੇ ਪੂਰਾ ਟਾਇਲ ਕਰ ਦਵਾਂਗੇ :-

੫੫. ਯੁਨਿਟ ਸਰਕਲ ਉਤੇ ਜੇ $n > 4$ ਪੌਐਂਟਸ ਦਿਤੇ ਹਨ, ਤਾਂ ਇਕ ਤੇ ਸਿਰਫ਼ ਇਕ $1 < c < \infty$ ਐਸਾ ਹੈ ਜੋ ਇਹ n ਕੋਨਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਨੂੰ 2π ਬਣਾਂਦਾ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ, ਜਿੰਵੇ ਇਹ n ਮੋਬੀਅਸ ਸੈਗਮੈਂਟਾ ਹੋਰ ਤੇ ਹੋਰ ਸਿਧੀਆਂ ਹੁਦਿੰਆਂ ਜਾਂਦਿਆਂ ਹਨ, ਇਹ ਜੋੜ ਸ਼ੁਰੁਆਤੀ ਕੀਮਤ 0 ਤੋਂ ਚਲਦਾ ਕੌਂਟੀਨੁਅਸਲੀ $(n-2)\pi > 2\pi$ ਵਲ ਵਧਦਾ ਹੀ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਆਪਾਂ ਇਹ c ਤੇ ਰੁਕ ਜਾਂਵਾਂਗੇ (ਪਰ ਨੋਟ ਕਰੋ ਜੇ $c \to \infty$ ਤਾਂ ਕੌਨਸੈਂਟਰਿਕ ਡਿਸਕ ਹੋਮੋਧੈਟਿਕਲੀ ਪੂਰਾ ਪਲੇਨ ਬਣ ਜਾਂਦੀ ਹੈ, ਅਤੇ ਯੁਣਿਟ ਡਿਸਕ ਦਿਆਂ ਸਭੀ ਆਰਕਸ ਇਹਦੀਆਂ ਰੇਡੀਅਲ ਹੋਮੀਓਮੋਰਫ਼ਿਜ਼ਮਜ਼ ਦੀ ਇਕ ਇਨਕਰੀਜ਼ਿੰਗ ਲੀਮੇਟ ਨਾਲ ਜਵਾਂ ਸਿਧੀਆਂ ਹੋ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ)।

ਐਸ ਰੇਡੀਅਸ c ਦੀ ਮੋਬੀਅਸ ਜਮੈਟਰੀ ਵਜੋਂ ਇਹ ਕਰਵਡ n–ਗੋਨ ਨਾਲ ਕੌਨਗਰੁਐਂਟ ਟਾਈਲਾਂ ਅਸੀਂ ਵਾਰ ਵਾਰ ਮੋਬੀਅਸ ਹਾਫ਼ ਟਰਨਜ਼ -- ਸੈਂਟਰ ਗਿਰਦ ਆਮ ਹਾਫ਼ ਟਰਨ ਦੇ ਕੋਂਜੁਗੇਟ -- ਜੋ ਭੁਜਾਂਵਾਂ ਨੂੰ ਉਲਟਾ ਦੇਨ ਨਾਲ ਲਗਾਂਦੇ ਹੀ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਕੋਨਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 2π ਹੋਨ ਕਾਰਣ ਕੋਈ ਲੋਕਲ ਫ਼ਿਟਿੰਗ ਪਰੋਬਲਮ ਨਹੀਂ।[1] ਤੇ ਜੇ ਟਾਈਲਾਂ ਲਗਾਂਦੇ ਅਸੀ ਕੋਈ ਪੌਐਂਟ ਤਕ ਦੋ ਅਲਗ ਰਸਤੇ ਵੀ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਇਹਦੇ ਉਤੇ ਟਾਇਲ ਓਹੀਓ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਧਰੀ ਜਾਊ ਕਿਉਂਕਿ ਡਿਸਕ ਸਿੰਪਲੀ ਕੋਨੈਕਟਿਡ ਹੈ।

ਸੋ ਟਾਇਲਿੰਗ ਤਾਂ ਬਣ ਗਈ। ਪਰ ਅਗੇ ਜੇ ਜੀ ਕਰੇ ਐਸ ਰੈਡੀਅਸ c ਵਾਲੀ ਡਿਸਕ ਦੀ ਰੈਡੀਅਲ ਸੈਲਫ਼ ਹੋਮੀਓਮੋਰਫ਼ਿਜ਼ਮ $r \mapsto \tilde{r}$ ਜੋ ਸਭ ਇਹਦੀਆਂ ਲਾਇਣਾਂ ਸਿਦੀਆਂ ਕਰ ਦੈਂਦੀ ਹੈ ਲਗਾ ਕੇ ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਾਰੀਆਂ ਟਾਈਲਾਂ ਨੂੰ ਆਮ n–ਗੋਨ ਵੀ ਬਣਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਸੋ ਹੁਨ ਬੀਜ ਦੇ ਵਰਟਿਸਿਜ਼ ਰੈਡੀਅਸ $\tilde{1} > 1$ ਵਾਲੇ ਸਰਕਲ ਤੇ ਹਨ। ਐਸ ਤੋਂ ਟਾਈਲਿੰਗ ਬਣਦੀ ਹੈ ਭੁਜਾਂਵਾ ਦੇ ਮਿਡ ਪੌਐਂਟਸ ਵਿਚ ਸੈਂਟਰਲ ਸੀਮੈਟਰੀਜ਼ ਨਾਲ, ਬਿਲਕੁਲ ਕੇਸ $n = 4$ ਵਾਂਗ ਹੀ, ਸਿਰਫ਼ ਹੁਣ ਪਲੇਨ ਦੇ ਯੁਕਲਿਡੀਅਣ ਡਿਸਟੈਂਸ ਦੀ ਜਗਹ ਰੇਡੀਅਸ c ਦੇ ਡਿਸਕ ਦੇ ਕੇਈਲੀ ਡਿਸਟੈਂਸ ਦੀ ਗਲ ਹੋ ਰਹੀ ਹੈ। □

ਪਰ, ਇਕੋ $1 < c < \infty$ ਨਹੀਂ ਕਮ ਕਰ ਸਕਦਾ ਯੁਨਿਟ ਸਰਕਲ ਦੇ ਸਾਰੇ ਕਾਰਡੀਨੈਲੇਟੀ n, ਜਿਥੇ $n > 4$, ਸਬਸੈਟਸ ਲਈ :- ਕਿਉਂਕਿ, ਯੁਨਿਟ ਡਿਸਕ ਦਾ ਸਿਰਫ਼ ਫਾਏਨਾਇਟ ਹਾਈਪਰਬੌਲਿਕ ਏਰੀਆ ਹੈ ਇਸ ਵਡੀ ਓਪੈਣ ਡਿਸਕ ਵਿਚ, ਪਰ ਦੂਜੇ ਹਥ ਐਸੇ ਇਨਫ਼ਾਏਨਾਇਟ ਡਿਸਜੌਐਂਟ n–ਗੋਨ ਹਨ ਓਹਦੇ ਵਿਚ, ਅਤੇ ਓਹਨਾਂ ਦਾਂ ਇਕੋ ਪੋਜ਼ੀਟਿਵ ਏਰੀਆ ਹੋਏਗਾ -- ਦੇਖੋ ਮੇਰੀ 'ਜੇਲ ਬੁਕ' ਦਾ §16.4 -- ਜੇ ਓਹਨਾਂ ਦਾ ਯੁਕਲੀਡੀਅਣ ਕੇਸ ਤੋਂ ਐਂਗਲ ਡੀਫ਼ੈਕਟ ਇਕੋ ਹੈ। □

'ਜੇਲ ਬੁਕ' ਦਾ ਗਿਆਨ ਮਦਦਗਾਰ ਹੈ! ਕਿਉਂ ਮੈਂਨੂੰ ਕੁਝ ਅਤ ਆਧੁਨਿਕ ਫ਼ਿਜ਼ਿਕਸ ਸਮੱਝ ਨਹੀਂ ਆ ਰਹੀ ਸੀ ਦੀ ਸਮਝ ਓਦੋਂ ਆਈ ਜਦੋਂ ਮੈਂਨੂੰ ਪਤਾ ਲੱਗਾ ਇਹਣਾਂ ਚੋਂ ਇਕ ਮਹਾਰੱਥੀ ਦੀ ਪੰਸਾਦੀ ਦੀ ਕਿਤਾਬ ਜੇ ਓਹ ਇਕ ਟਾਪੂ ਤੇ ਇਕੱਲਾ ਫ਼ਸ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਸਪੈਸ਼ਲ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨਜ਼ ਦੀ ਹੈਂਨਡਬੁਕ ਸੀ।

ਕੋਕਸੈਟਰ. 'ਇੰਟਰੋਡੱਕਸ਼ਨ ਟੂ ਜੀਓਮੈਟਰੀ' (੧੯੬੯) ਬਾਰੇ ਇਹ ਟੋਟਕਾ ਐਸ ੨੦੦੮ ਦੇ ਪਰਚੇ ਦਾ ਫ਼ੁਟਨੋਟ ੧੭ ਦਿੰਦਾ ਹੈ, ਅਤੇ ਕਿਣੀਆਂ ਹੋਰ ਵੀ ਮਜੇਦਾਰ ਚੀਜ਼ਾ ਹਨ ਇਹਦੇ ਵਿਚ, ਮਸਲਨ, ਗਣਿਤ ਦੀ ਏਕਤਾ ਬਾਰੇ ਇਹ ਗੂੰਜਦਾ ਐਲਾਣ ਪੇਜ ੧੦ ਤੇ : 'ਦੀ ਟਾਈਨੀਅਸਟ ਲਿਵਿੰਗ ਬਿਟ ਓਫ਼ ਮੈਥੇਮੈਟਿਕਸ ਇਜ਼ ਇਨੱਫ਼ ਟੂ ਕਲੋਨ ਬੈਕ ਦਾ ਇੰਟਾਇਰ ਬੀਸਟ!'

ਇਹ ਹੀ ਨਹੀਂ, ਇਕ 'ਲਿਵਿੰਗ ਬਿਟ' ਦੀ ਅੱਤ ਸਾਧਾਰਣ ਉਧਾਰਣ -- ਇਕ ਗਲਤ (!) ਫ਼ੋਰਮੁਲਾ ਕਵਾਡਰੀਲੈਟਰਲ ਦੇ ਛੇਤਰਫ਼ਲ ਲਈ -- ਤੋਂ ਫ਼ੁਟ ਪਏ ਸੀ ਏਣੀ ਜਲਦੀ ਏਣੇ ਭਿੰਣ ਵਿਚਾਰ ਕਿ ਮੈਰੇ ਵਿਚਾਰ ਚ ਐਸ ਵਿਚਾਂਰਾਂ ਦੀ ਕਾਰਟੀਸ਼ੀਅਣ ਧਾਰਾ ਨੂੰ ਬਣਾ ਦੇਣਾ ਚਾਹਿਦੈ 'ਇੰਟਾਇਰ ਬੀਸਟ'।

---

[1] ਨਾਂ ਹੀ ਪਰੌਬਲਮ ਹੈ ਜੇ ਕੋਨਾਂ ਦਾ ਜੋੜ $2\pi/j$ ਹੈ, ਸੋ ਇਹ ਹਾਫ਼ ਟਰਨਜ਼ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਯੁਨਿਟ ਸਰਕਲ ਦੇ ਹਰ ਕਾਰਡੀਨੈਲੇਟੀ $n \geq 3$ ਫ਼ਾਏਨਾਇਟ ਸਬਸੈਟ σ ਨਾਲ ਐਸੋਸ਼ੀਏਟ ਕਰਦੀ ਹੈ ਟਾਈਲਿੰਗਜ਼ ਦਾ ਇਕ ਇਨਫ਼ੇਨਾਇਟ ਡਿਸਕਰੀਟ ਸਪੈਕਟਰਮ! ਟਾਈਲਿੰਗਜ਼ ਫ਼ੇਰ ਰੇਡੀਆਈ $c_{\sigma,j} > 1$ ਡਿਸਕਾਂ ਦੀਆਂ, ਪਰ $n = 3$ ਲਈ $j \geq 2$ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ। ਅੱਗੇ ਕੇਸ $n = 3, j = 2$ ਤੇ $n = 4, j = 1$ ਨੂੰ ਛੱਡ $c_{\sigma,j}$ ਫ਼ਾਏਨਾਇਟ ਹੈ, ਅਤੇ ਜੇ $j \to \infty$ ਤਾਂ ਇਹਦੀ ਲੀਮਿਟ ਇਕ ਹੈ।

ਐਣੀਵੇ, ਇਸ ਤੋਂ ਐਟ ਲੀਸਟ ਜਨਮ ਹੋਏਆ ਸੀ ਫੋਰ ਹਾਫ਼ ਟਰਨਜ਼ (੨੦੧੦) ਦਾ, ਛੱਤ ਤੇ ਬਣਾਈ ਟਾਈਲਿੰਗ, ਜਿਹਦਾ ਹੁਣ ਪੁਨਰ ਜਨਮ ਹੋ ਗਿਆ ਹੈ ਡਿਗਰੀ ਚਾਰ ਦੀ ਇਕੁਏਸ਼ਨਜ਼ ਵਿਚਾਰਦੇ, ਜਿਸ ਸੰਧਰਭ ਸਦਕੇ ਸਾਣੁ ਹੁਣ ਸਾਫ਼ ਦਿਖ ਰਹੀ ਹੈ ਐਸ ਟਾਈਲਿੰਗ ਵਿਚ, ਇਕ ਦੋਹਰੀ ਪੈਰੀਓਡਿਕ ਹੋਲੋਮੋਰਫ਼ਿਕ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨ ਕੌਮਪਲੈਕਸ ਪਲੇਨ $\mathbb{C}$ ਤੋਂ ਰੀਮਾਣ ਸਫ਼ੀਅਰ S^2 ਤਕ :-

ਦਰਅਸਲ ਕੋਈ ਲੋੜ ਨਹੀਂ ਅਜੇ ਵੀ $\mathbb{R}^2$ ਤੇ ਕੋਮਪਲੈਕਸ ਜ਼ਰਬ ਦੀ, ਕਾਫ਼ੀ ਹੈ ਬਣਾਣਾ ਇਕ ਸਮਝੋ ਕਾਰਟੂਣ ਜਿਹਾ -- ਦੇਖੋ ਨਾਇਸ (੨੦੦੨) -- ਐਸ ਮੈਰੋਮੋਰਫ਼ਿਕ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨ ਦਾ।

ਟਾਇਲਾਂ ਦਿੰਆ ਭੁਜਾਂਵਾਂ ਦੇ ਮਿਡ ਪੌਐਂਟਸ ਤੇ ਹਾਫ਼ ਟਰਨਜ਼ ਤੋਂ ਜੈਨੇਰੇਟਿਡ ਗਰੁਪ ਟਾਈਲਾਂ ਤੇ ਸਿੰਪਲੀ ਟਰਾਂਜ਼ਟਿਵ ਹੈ। ਪਲੇਨ ਨੂੰ ਇਹਦੇ ਨਾਲ ਤਕਸੀਮ ਕਰਕੇ ਬਣਦਾ ਹੈ S^2। ਇਹ ਐਸ ਲਈ ਕਿ ਇਕ ਟਾਇਲ ਦਿਆਂ ਚਾਰਾਂ ਸਾਈਡਾਂ ਨੂੰ ਓਹਨਾਂ ਦੇ ਮਿਡ ਪੌਐਂਟਸ ਤੇ ਦੋਹਰਾ ਕਰਕੇ ਮਿਲਦੇ ਹਨ 5 ਵਰਟਿਸਿਸ, 4 ਐਜਿਜ਼ ਤੇ 1 ਸੈਲ, ਸੋ ਓਏਲਰ ਨੰਬਰ $5-4+1=2$ ਹੈ। ਇਹ ਕੋਸ਼ੈਂਟ ਮੈਪ $\mathbb{R}^2 \to S^2$ ਟਾਈਲਾਂ ਦਿਆਂ ਭੁਜਾਂਵਾਂ ਦੇ ਮਿਡ ਪੌਐਂਟਸ ਨੇੜੇ ਹੀ ਵਨ-ਟੂ-ਵਨ ਨਹੀਂ, ਇਹਣਾਂ ਨੇੜੇ ਇਹ ਟੂ-ਟੂ-ਵਨ ਹੈ।

ਅੱਗੇ ਆਪਾਂ ਨੇ ਨੋਟ ਕਿਤਾ ਸੀ ਕਿ ਓਹ ਛਤ ਵਾਲੀ ਟਾਏਲਿੰਗ ਨੂੰ ਦੋਵੇਂ ਡਾਏਗਨਲਾਂ ਉਤੇ ਸਲਾਇਡ ਕਰਕੇ ਵੀ ਬਣਾਏਆ ਜਾਂ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਸੋ ਇਹ ਕਵਾਡਰੀਲੈਟਰਲ ਦੇ ਦੋਂਵੇਂ ਡਾਏਗਨਲ ਹਨ ਇਸ ਕੋਸ਼ੈਂਟ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨ ਦੇ ਪਿਰੀਅਡ। ਇਹ ਡਬਲ ਪੈਰੀਓਡਿਸਿਟੀ ਜ਼ਾਹਿਰ ਕਰਦਾ ਇਕ ਫ਼ੰਡਾਮੈਂਟਲ ਰੀਜਨ -- ਜਾਣਕੇ ਓਹ ਜੋ ਤੁਸੀਂ ਸੋਚ ਰਹੇ ਸੀ, ਇਕ ਪੈਰੇਲੈਲੋਗਰਾਮ, ਤੋਂ ਕੁਝ ਹਟ ਕੇ -- ਵੀ ਦਿਖਾਏਆ ਸੀ ਅਸੀਂ ਓਹੀ ਚਿਤਰ ਵਿਚ।[2] ਸੋ ਕੋਸ਼ੈਂਟ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਫ਼ੇਕਟਰ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ $\mathbb{R}^2 \to T^2 \to S^2$, ਜਿਥੇ ਪਹਲੀ ਇਨਫ਼ਾਏਨਾਇਟ ਅਨਬਰਾਂਚੱਡ ਆਮ ਕਵਰਿੰਗ ਹੈ ਟੋਰਸ ਦੀ ਪਲੇਨ ਨਾਲ, ਦੁਜੀ ਹੈ ਸਫ਼ੀਅਰ ਦੀ ਟੋਰਸ ਨਾਲ ਦੋਹਰੀ ਕਵਰਿੰਗ ਚਾਰ ਥਾਂਈ ਚਾਰ ਵਿਭਿੰਨ ਕੀਮਤਾਂ ਉਤੇ ਬਰਾਂਚੱਡ। $\square$

ਗਿਆਣੀ ਜੇ ਤੁਸੀਂ ਹੋ ਸਮਝ ਗਏ ਹੋਵੋਗੇ ਹੁਣ ਤਕ ਅਗੇ ਕਿ ਹੋਏਗਾ ਡਿਗਰੀ ਚਾਰ ਦਿਆਂ ਇਕੁਏਸ਼ਨਜ਼ ਹਲ ਕਰਣ ਦਾ ਤਰੀਕਾ :- ਸਿਧੇ ਇਕੁਏਸ਼ਨ ਤੋਂ ਆਪਾਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਲਾਯੌਂਦਰ ਦਾ ਲਾਇਣ ਇਣਟੈਗਰਲ, ਇਕ ਕਲੋਜ਼ਡ 1-ਫ਼ੌਰਮ ਦਾ, ਜਿਹਦੇ ਕੋਸ਼ੀ ਪੀਰੀਅਡ ਹਨ ਇਹ ਦੋਵੇਂ ਵੈਕਟਰ। ਪਰ ਯੁਣਿਟ ਸਰਕਲ ਦਿਆਂ ਦੋ ਹੀ ਕੋਰਡਜ਼ ਹਨ ਇਕ ਵੈਕਟਰ ਦੇ ਬਰਾਬਰ। ਸੋ ਸਮਜਹੋ ਮਿਲ ਗਿਆ ਕਵਾਡਰੀਲੈਟਰਲ ਚਾਰੋਂ ਰੁਟਾਂ ਸਮੇਤ। ਮਸਲਣ, ਜੇ ਆਪਾਂ ਪਰਖ ਚੁਕੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਾਰੇ ਰੁਟ ਪੋਜ਼ੀਟਿਵ ਹੀ ਹੋਣੇ ਚਾਹੀਦੇ ਹਨ, ਤਾਂ ਮਾਸਾ ਵੀ ਅੰਤਰ ਨਹੀਂ ਬਚੇਆਂ, ਪੂਰਾ ਹਲ ਹੋ ਗਿਆ ਇਕੁਏਸ਼ਨ ਦਾ ਇਸ ਕੈਲਕੁਲੇਸ਼ਨ ਨਾਲ।

ਬੜਾ ਟੇਹਢਾ ਲਗਦਾ ਹੈ ਇਹ ਤਰੀਕਾ ਸਿਰਫ਼ ਡਿਗਰੀ 4 ਦੇ ਲਈ ਹੀ, ਪਰ ਗਲ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਕੁਝ ਹੋਰ ਕਮ ਨਾਲ ਇਹ ਰੈਲੇਟਿਵਿਸਟਿਕਲੀ ਸਭ ਡਿਗਰੀਜ਼ $n > 4$ ਨੂੰ ਜੈਨੇਰੇਲਾਇਜ਼ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

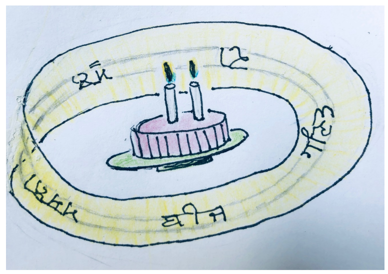
੫੯. ਸਵੈਲੋਟੇਲ $\heartsuit$ ਤੋਂ ਸਾਡਾ ਭਾਵ ਹੈ ਸਪੇਸ ਸਾਰਿਆਂ $\mathbf{x}$ ਤੇ $\mathbf{y}$ ਵਿਚ ਹੋਮੋਜੀਨਸ ਡਿਗਰੀ n ਇਕੁਏਸ਼ਨਜ਼ ਜਿਨਹਾਂ ਦੇ n ਵਿਭਿਣ ਐਕਸਟੈਂਡਿਡ ਰੀਅਲ ਰੂਟ ਹਨ। ਹਾਂ ਇਕੋ ਅਗਿਆਤ $\mathbf{x}$ ਵਿਚ ਸਾਰਿਆਂ ਡਿਗਰੀ n ਇਕੁਏਸ਼ਨਜ਼ ਦੀ ਇਹਦੀ ਸਬਸਪੇਸ ਨੂੰ ਵੀ ਅਸੀ ਕਦੇ ਐਸ ਨਾਮ ਨਾਲ ਹੀ ਬੁਲਾਏਆ ਹੈ। ਹੋਰ ਪਹਲਾਂ $n=3$ ਲਈ ਖਿਯਾਮ ਦੀ ਹੋਰ ਛੋਟੀ ਸਬਸਪੇਸ ਜਿਥੇ ਰੁਟਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਜ਼ਿਰੋ ਹੈ ਸੀ ਓਹ ਪੀਲਾ ਮੋਰਪੰਖ, ਕੁਝ ਸ਼ਕਲ ਖਾਤਰ, ਕੁਝ ਐਸ ਲਈ ਕਿ ਇਹ ਪੰਛੀ ਓਹਦੀ ਕਵਿਤਾ ਨਾਲ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਪਰ ਮੋਰ ਦੀ ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ ਮੈਨੂੰ ਭਾਂਦੀ ਨਹੀਂ, ਸੋ ਤਰਜਮਾ ਕਰਦੇ ਮੈਂ ਪੰਛੀ ਬਦਲ ਕੇ ਸਵੈਲੋਟੇਲ ਵਰਤਣ ਲਗ ਪਿਆ, ਇਹ ਜਾਣਦੇ ਹੋਏ ਵੀ ਕਿ ਥੌਮ ਨੇ ਇਹ ਸ਼ਬਦ ਨੂੰ ਇਕ ਨਜ਼ਦੀਕੀ ਸਿੰਗੁਲੈਰੀਟੀ ਲਈ ਇਸਤਮਾਲ ਕਿਤਾ ਸੀ। ਇਹ ਬਦਲਾਵ ਦੀ ਗਲ ਮੈਂ ਪਹਲਾਂ ਕਰ ਚੁਕਾਂ ਹਾਂ, ਕੁਝ ਐਂਵੇਂ ਹੀ ਹੈ ਇਹ ਜਿੰਵੇ ਪਹਲਾਂ ਬੌਲ ਦਾ ਆਮ ਅਰਥ ਸੀ ਓਹਦੀ ਬਾਉਂਡਰੀ।

ਫ਼ੇਰ ਥੌਮ ਦੇ ਖਿਆਲਾਂ ਨੂੰ ਸੁਧਾਰਦੇ ਆਰਨੌਲਡ ਨੇ ਸਿਧ ਕੀਤੀਆਂ ਸੀ ਸਿੰਗੁਲੈਰੀਟੀਜ਼ ਬਾਰੇ ਕੁਝ ਜੈਨਰਲ ਕਲਾਸੀਫ਼ਿਕੇਸ਼ਨ ਥੀਓਰਮਜ਼ ਤੇ ਲਿਖੀ ਸੀ ਇਕ ਪਿਆਰੀ ਕਿਤਾਬ, 'ਕੈਟੌਸਟਰੌਫ਼ ਥੀਓਰੀ' (੧੯੮੪)। ਇਸ ਵਿਚ ਵੀ 'ਸਵੈਲੋਟੇਲਜ਼' ਵਖ ਵਖ ਸਿੰਗੁਲਰ ਸੈਟਸ ਹਨ ਪਰ ਜ਼ਾਹਿਰ ਹੈ -- ਦੇਖੋ ੨੦੦੪ ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ ਐਡੀਸ਼ਨ ਦੇ ਪਣੇ ੩੪, ੩੭, ੮੫, ੮੯, ੯੦, ੧੦੧, ੧੦੯ ਅਤੇ ਅੰਤ ਵਿਚ ਸਵਾਲ ਨੰਬਰ ੫, ੬, ੧੫, ੪੧, ੫੨, ੬੯, ੭੦ ਤੇ ਖਾਸ ਕਰ ੭੭ -- ਕਿ ਲੇਖਕ ਨੂੰ ਕਿਨ੍ਹਾ ਕੁਝ ਐਸਾ ਪਤਾ ਸੀ ਸਪੇਸਿਜ਼ ਓਫ਼ ਇਕੁਏਸ਼ਨਜ਼ ਬਾਰੇ ਜਿਹਦੀ ਆਪਾਂ ਅਜੇ ਗਲ ਸ਼ੁਰੂ ਵੀ ਨਹੀਂ ਕੀਤੀ।

[2] ਪਰ ਸੱਭ ਤੋਂ ਸਹੀ ਫ਼ੰਡਾਮੈਂਟਲ ਰੀਜਣ ਸੀ ਹੈਕਸਾਗਨਲ ਯੁਨਿਅਣ ਦੋ ਜੁੜਵੀਆਂ ਟਾਈਲਾਂ ਦਾ! ਜੇ $n \geq 5$ ਤਾਂ ਇਹੋ ਯੁਨਿਅਣ ਝੱਟ ਦਿੰਦਾ ਹੈ ਕੋਸ਼ੈਂਟ ਮੈਪ ਦੇ ਫ਼ੈਕਟਰ $B^2 \to M^2 \to S^2$, ਜਿਥੇ ਪਹਲਾ ਯੁਨੀਵਰਸਲ ਕਵਰਿੰਗ ਹੈ ਕਲੋਜ਼ਡ ਸਰਫ਼ੈਸ M^2 ਦੀ, ਅਤੇ ਦੁਜਾ S^2 ਦੀ ਦੋਹਰੀ ਕਵਰਿੰਗ ਇਕ ਇਕ ਵਾਰ n (ਜੇ ਇਹ ਈਵਣ ਹੈ) ਯਾਂ $n+1$ ਪੌਐਂਟਸ ਤੇ ਬਰਾਂਚੱਡ।

ਪਰ ਲੌਟਦੇ ਕਹਾਣੀ ਨੂੰ ਜੋ ਚਾਲੂ ਹੈ, n-ਸਵੈਲੋਟੇਲ $\heartsuit_n$ ਸਰਜੈਕਟ ਕਰਦੀ ਹੈ ਸਰਕਲ $\widehat{L}$ ਤੇ ਫ਼ਾਇਬਰ $(n-1)$-ਬੌਲ ਨਾਲ, ਪਰ n ਈਵਣ ਲਈ ਓਰੀਐਂਟੇਬਲ ਨਹੀਂ :- ਸਰਜੈਕਸ਼ਨ ਲੈ ਲੋ ਸਵੈਲੋਟੇਲ ਦੀ ਹਰ ਇਕੁਏਸ਼ਨ ਦੇ n ਭਿੰਣ ਰੂਟਾਂ x_i ਦਾ ਜੋੜ, ਜਿਥੇ ਜੇ ਕੋਈ $x_i = \infty$ ਤਾਂ ਜੋੜ ∞ ਹੋਵੇਗਾ। ਸਾਰੇ ਪਰੀ-ਇਮੇਜ ਟੋਪੋਲੋਜਿਕਲ $(n-1)$-ਬੌਲ ਹਨ, ਮਸਲਨ ∞ ਕੀਮਤ ਹੈ ਸਿਰਫ਼ ਤੇ ਸਿਰਫ਼ ਓਹ ਸਭ ਇਕੁਏਸ਼ਨਜ਼ ਦੀ ਜਿਨਹਾਂ ਦਾ ਇਕ ਰੁਟ $x = \infty$ ਹੈ। ਓਹ n-ਬੌਲ ਜੋ ਸਵੈਲੋਟੇਲ ਦੇ ਬਾਕੀ ਸਭ ਪੌਐਂਟ ਬਣਾਂਦੇ ਹਨ ਓਹਨੂੰ ਤਾਂ ਆਪਾਂ ਚਲੋ ਰੁਟਾਂ ਦੇ ਓਰਡਰ $x_1, \dots x_{n-1}, x_n$ ਨਾਲ ਓਰੀਐਂਟ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਪਰ ਜਦੋਂ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਰੁਟ x_n ਇਨਫ਼ਿਨੈਟੀ ਟਪ ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟਾ ਬਣ ਜਾਂਦਾ ਹੇ, ਓਰੀਐਂਟੇਸ਼ਨ ਦੇਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ $x_n, x_1, \dots, x_{n-1}$ ਨੂੰ, ਜਿਹਦੀ ਪੈਰੀਟੀ ਭਿੰਨ ਹੈ n ਈਵਣ ਲਈ। □ ਦੋ ਸਾਲ ਪਹਲਾਂ $n = 2$ ਲਈ ਇਹ ਮੋਬੀਅਸ ਸਟਰਿਪ ਨਾਲ ਹੀ ਮੈਂ ਬੀਜ ਗਣਿਤ ਦਾ ਮੂਲ ਮਸਲਾ ਖੜਾਂ ਕਿਤਾ ਸੀ।



ਉਤਲੀ ਪਰੋਜੈਕਸ਼ਨ, ਰੂਟਾਂ x_i ਦਾ ਜੋੜ, ਨੂੰ ਪਰੀਜ਼ਰਵ ਕਰਦਿਆਂ ਹਨ ∞ ਨੂੰ ਫ਼ਿਕਸਡ ਰਖਦੀਆਂ L ਦੀਆਂ ਟਰਾਂਸਲੈਸ਼ਨਜ਼; ਇਹ ਨਹੀਂ ਵਿਖਾਉਂਦੀ ਕਿੰਵੇ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਰੂਟ 'ਇਨਫ਼ਿਨੈਟੀ ਟਪ' ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟਾ ਬਣ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਮੋਬੀਅਸ ਜੀਓਮੈਟਰੀ ਪੱਖੋਂ ∞ ਸਰਕਲ $\widehat{L}$ ਦੇ ਬਾਕੀ ਪੌਐਂਟਸ ਵਾਂਗ ਹੈ, ਸੋ ਬਿਹਤਰ ਹੈ $\widehat{L}$ ਨੂੰ ਓਹ ਗੋਲ ਰੈਫ਼ਲੈਕਸ਼ਨ ਉਪਰਾਂਤ $\mathbb{R}^2$ ਦਾ ਯੁਣਿਟ ਸਰਕਲ S^1 ਮਨਣਾ, ਤੇ ਅੱਗੇ ਐਸ ਤੇ ਐਕਟ ਕਰਦੇ ਬੇਬੀ ਗਰੁਪ $\mathcal{G}$ ਦੇ ਰੋਟੇਸ਼ਨ ਸਬਗਰੁਪ ਨੂੰ S^1 ਨਾਲ ਹੀ ਆਮ ਵਾਂਗ ਇਡੈਂਟੀਫ਼ਾਈ ਕਰ ਦੇਣਾ। ਸੋ ਮਿਲ ਗਈ ਹੇ ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਬੇਬੀ ਸਬਗਰੁਪ ਸਦਕੇ S^1 ਉਤੇ ਬੇਬੀ ਜ਼ਰਬ -- ਗੰਮਭੀਰ ਗਣਿਤਕਾਰਾਂ ਲਈ ਕੌਮਪਲੈਕਸ ਮਲਟੀਪਲਿਕੇਸ਼ਨ! -- ਤੇ ਆਪਾਂ ਹੁਣ ਵਰਤਾਂਗੇ ਥੱਲੇ n-ਸਵੈਲੋਟੇਲ ਤੋਂ ਸਰਕਲ ਉਤੇ ਪਰੋਜੈਕਸ਼ਨ ਜੋ ਦਿੰਦੀ ਹੀ ਇਕੁਏਸ਼ਨਜ਼ ਦੇ ਰੁਟਾਂ x_i ਨਾਲ ਬੰਧੇ S^1 ਦੇ n ਪੌਐਂਟਸ z_i ਦੀ ਬੇਬੀ ਜ਼ਰਬ। ਐਸ ਤੋਂ ਫ਼ੱਟ ਪਤਾ ਲਗ ਜਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਾਫ਼ੀ ਕੁਝ n-ਸਵੈਲੋਟੇਲ ਦੀ ਸਰਕਲਜ਼ ਨਾਲ ਫ਼ੋਲੀਏਸ਼ਨ ਬਾਰੇ :-

ਇਹ ਪਰੋਜੈਕਸ਼ਨ $\prod z_i$ ਤਾਂ ਐਂਗਲ $2\pi/n$ ਬਾਦ ਹੀ ਸਰਕਲ ਨੂੰ ਕਵਰ ਕਰ ਲੈਂਦੀ ਹੈ ਪਰ ਸਵੈਲੋਟੇਲ ਦੀ ਇਕੋ S^1-ਓਰਬਿਟ ਐਨੇ ਵਿਚ ਹੀ ਪੂਰੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਹੋਰਾਂ ਨੂੰ ਲਗ ਸਕਦੇ ਹਨ n ਦੇ ਕਿਸੀ ਵੀ ਹੋਰ ਡੀਵਾਈਜ਼ਰ ਜਿਨੇ ਫ਼ੇਰੇ : ਕਿਨੇ ਫ਼ੇਰੇ ਲਗਦੇ ਹਨ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦਾ ਹੈ ਕਿਨ੍ਹਾ ਰੈਗੁਲਰ ਹੈ z_i ਵਰਟਿਸਿਜ਼ ਵਾਲਾ ਇਨਸਕਰਾਈਬਡ n-ਗੋਨ। ਇਕੋ ਫ਼ੇਰਾ ਓਦੋਂ ਤੇ ਓਦੋਂ ਹੀ ਕਾਫ਼ੀ ਹੈ ਜਦੋਂ n-ਗੌਨ ਪੁਰਾਂ ਰੈਗੁਲਰ ਹੈ, ਤੇ ਇਹ ਸਭ ਸਵੈਲੋਟੇਲਜ਼ ਦਿਆਂ ਇਕੁਏਸ਼ਨਜ਼ ਇਕੋ S^1 ਓਰਬਿਟ ਤੇ ਹਨ। ਮਸਲਨ ਜੇ n ਪਰਾਇਮ ਹੈ ਤਾਂ ਬਾਕੀ ਸਭ ਓਰਬਿਟਸ ਪੁਰੇ n ਗੇੜੇ ਮਾਰਦਿਆਂ ਹਨ ਗੱਭਲੀ ਓਰਬਿਟ ਦੇ ਗਿਰਦ। □

ਖਿਯਾਮ ਤੋਂ ਚਲ ਵਿਚਾਰੇਆ ਜਾਂਦਾ ਕਿਉਬਿਕਸ ਦਾ ਕੇਸ $n = 3$ ਵੀ ਦਿਲਚੱਸਪ ਹੈ ਇਹ ਟੋਪੋਲੋਜੀ ਪੱਖੋਂ, 3-ਸਵੈਲੋਟੇਲ ਦੀ ਬਾਉਂਡਰੀ ਦੀਆਂ ਸਭ ਓਰਬਿਟਸ ਹਨ ਟਾਇਪ $(3, 2)$ ਟੋਰਸ ਨੌਟਸ :- ਜੇ z_1 ਇਕ ਸਿੰਪਲ ਤੇ z_2 ਇਕ ਡਬਲ ਰੁਟ (ਨਾਲ ਬੰਧੇ) ਹਨ ਤੇ $S^1 \times S^1$ ਤੇ ਪਰੋਜੈਕਸ਼ਨ $(z_1 z_2^2, z_1 z_2)$ ਦੀ ਪੀਰੀਓਡੀਸੀਟੀ ਹੈ $(2\pi/3, \pi)$। ਪਹਲੇ ਲੋਟ ਜੋ ਆਪਾਂ ਦੇਖ ਚੁਕੇ ਹਾਂ ਲਿਮਿਟ ਵਿਚ ਪੂਰੇ 3 ਫ਼ੇਰੇ ਲਊ ਇਹ ਕੀਉਬਿਕ ਦੀ ਓਰਬਿਟ, ਦੁਜੇ ਲੋਟ ਵੀ ਪੂਰੇ 2 ਫ਼ੇਰੇ ਲੱਗਣਗੇ, ਭਾਂਵੇ z_1 ਤੇ z_2 ਆਮਣੇ ਸਾਮਣੇ ਨਾਂ ਹੋਣ, π ਦੀ ਰੋਟੇਸ਼ਣ ਬਾਦ ਮਲਟੀਪਲੀਸਿਟੀ ਜੋ ਬਦਲ ਜਾਉ। ਰਹੰਦੀ ਕਸਪਾਈਡਲ ਕਰਵ, ਕਿਉਬਿਕਸ ਜਿਹਨਾਂ ਦਾ ਟਰੀਪਲ ਰੁਟ ਹੈ z, ਉਤੇ ਲਿਮਿਟ ਪਰੋਜੇਕਸ਼ਨ (z^3, z^2) ਫ਼ੇਰ ਹੈ ਟਾਇਪ $(3, 2)$। □

ਜ਼ੀਮੈਨ 'ਦੀ ਅਮਬਲਿਕ ਬਰੇਸਲੈਟ ਐਂਡ ਦਾ ਡਬਲ-ਕਸਪ ਕੈਟੌਸਟਰੌਫ਼' (੧੯੭੬) ਵਿਚ ਲਾਗੇ ਦੀ ਜਮੈਟਰੀ, $\mathbb{R}P^3$ ਦੇ ਦੂਹਰੇ ਕਵਰ S^3 ਉੱਤੇ - ਹੁਣ ਐਕਸ਼ਨ ਮੈਟਰਿਸਿਜ਼ $A \in SO(2,\mathbb{R})$ ਦਾ ਹੈ ਨਾਂ ਕਿ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇਆਂ $\pm A$ ਦਾ - ਨੂੰ ਵਿਚਾਰੇਆ ਜਾ ਰੇਹਾ ਹੈ, ਜਿਥੇ ਗੰਡਾਂ ਖੁਲ ਕੇ ਬਰੇਸਲੈਟ ਤੇ $(3,1)$ ਅਨ-ਨੌਟਸ ਬਣ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ, ਤੇ ਕੈਟੌਸਟਰੌਫ਼ ਜਿਸ ਦੀ ਗਲ ਹੋ ਰਹੀ ਹੇ, ਓਹ ਨੇੜੇ ਹੈ $\mathbb{R}P^3$ ਉਤੇ ਗਰਾਫ਼ G ਜੋ ਡੀਫ਼ਾਇਨ ਕਰਦੇ ਹਨ ਕਿਉਬਿਕਸ ਦੇ ਸਭ ਰੀਅਲ ਰੂਟਸ।

ਥੀਓਰੀ ਓਫ਼ ਇਕੁਏਸ਼ਨਜ਼ - ਹਾਂ ਬਾਈ! ਪੌਲੀਨੌਮੀਅਲ ਇਕੁਏਸ਼ਨਜ਼ - ਜੋ ਮੈਂ ਨਰਾਲੇ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਮੁਢ ਤੋਂ ਵਿਕਸਿਤ ਕਰ ਰੇਹਾਂ ਹਾਂ ਇਕੋ ਅਗੀਆਤ x ਦਿਆਂ ਇਕੁਏਸ਼ਨਜ਼ ਬਾਰੇ ਹੈ। ਖੁਰਪੇ ਨੂੰ ਖੁਰਪਾ ਹੀ ਕਹਿਨਾ ਚਾਹਿਦਾ ਹੈ ਦੇ ਵਾਕ ਤੇ ਚਲਦੇ, ਮੈਂ ਤਾਂ ਸੰਧਰਭ ਦੇਖਦੇ ਹੋਏ ਸ਼ੁਰੂ ਤੋਂ ਹੀ ਨੀਝਿਜਕ ਇਹ ਯਾਂ ਓਹ ਸਪੇਸ ਓਫ਼ ਇਕੁਏਸ਼ਨਜ਼ ਦੀ ਗਲ੍ਹਾਂ ਕਰ ਰੇਹਾ ਹਾਂ, ਪਰ ਪਤਾ ਨਹੀਂ ਕਿਉਂ, ਸਭ ਲੋਗ ਜਿਨਹਾਂ ਦਾ ਕੰਮ ਮੈਂਨੂੰ ਕੁਝ ਨਜ਼ਦੀਕੀ ਦਿੱਖੇਆ, ਇਸ ਕੁਦਰਤੀ ਫ਼ਰੇਜ਼ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਤੋਂ ਕਤਰਾਂਦੇ ਹੀ ਦਿਖੇ!

ਡੁਅਲ ਅਗਿਆਤ y (ਯਾਂ t ਟਾਇਮ) ਦੇ ਐਕਸਪਲਿਸਿਟ ਜ਼ਿਕਰ ਬਗੈਰ ਭਾਸ਼ਾ ਵਿਚ ਸਰਲਤਾ ਹੈ। ਮੁਖ ਗਲ੍ਹ ਤਾਂ ਇਹ ਸੀ ਕਿ ਇਕੋ ਡਿਗਰੀ n ਤੋਂ ਕੁਦਰਤੀ ਹੈ ਸਭ ਡਿਗਰੀਆਂ $\leq n$ ਦਿਆਂ ਇਕੁਏਸ਼ਨਾਂ ਵਿਚਾਰਣਾ। ਤਦ, ਬੇਸ਼ਰਤੇ ਅਸੀਂ ਇਕਲੌਤੀ ਡਿਗਰੀ ਜ਼ਿਰੋ ਦੀ ਇਕੁਏਸ਼ਨ ਨਾਂ ਭੁਲੀਏ, ਇਹ ਕਰਣ ਨਾਲ ਸਪੇਸਿਸ ਬਣ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ ਕੌਮਪੈਕਟ। ਜਿੰਵੇ ਕਿ, ਡਿਗਰੀ 1 ਦਿਆਂ ਸਭ ਇਕੁਏਸ਼ਨਾਂ ਦੀ ਸਪੇਸ ਹੈ ਇਕ ਰੇਖਾ - ਫ਼ਿਲਹਾਲ ਜੋ ਇਹ 'ਰੀਅਲ ਨੰਬਰ' ਹੀ ਹਨ ਸਾਡੇ ਕੋਲ - L, ਪਰ ਡਿਗਰੀ ≤ 1 ਦਿਆਂ ਬਣਾਂਦੀਆਂ ਹਨ ਸਰਕਲ $\widehat{L}$, ਅਤੇ ਐਂਵੇਂ ਹੀ ਚਲਦੇ, ਸਭ ਡਿਗਰੀ $\leq n$ ਦਿਆਂ $\mathbb{R}P^n$।

ਪਰ $n \geq 2$ ਲਈ ਸਾਡਾ ਫ਼ੋਕਸ ਹੈ ਹਦ $\mathbb{R}P^n$ ਦਾ n-ਡਾਈਮੈਨਸ਼ਨਲ ਸਬਮੈਨੀਫ਼ੋਲਡ ਵਿਦ ਬਾਉਂਡਰੀ, ਕਲੋਜ਼ਡ n-ਸਵੈਲੋਟੇਲ $\overline{\heartsuit}_n$, ਜੋ ਹੈ ਸਪੇਸ ਸਾਰੀਆਂ x ਵਿਚ ਡਿਗਰੀਜ਼ $0 \leq j \leq n$ ਇਕੁਏਸ਼ਨਜ਼ ਦੀ, ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਸਾਰੇ j ਰੂਟ ਰੀਅਲ ਹਨ। ਇਹਦੀਆਂ ਸਭ ਇਕੁਏਸ਼ਨਜ਼ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਹੋਮੋਜੀਨੱਸਲੀ ਡਿਗਰੀ n ਦਾ ਵੀ ਸਮਝਾਂ ਗੇ, ਇਹ ਕਹੰਦੇ ਹੋਏ ਕਿ ਬਾਕੀ $n-j$ ਰੂਟ ∞ ਤੇ ਚਲੇ ਗਏ ਹਨ। ਮਸਲਨ, ਡਿਗਰੀ 0 ਇਕੁਏਸ਼ਨ $1=0$ ਦੇ 0 ਰੀਅਲ ਰੂਟ ਹਨ, ਪਰ ਜਦੋਂ ਇਹਨੂੰ ਵਿਚਾਰ ਰਹੇ ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਕਲੋਜ਼ਡ n-ਸਵੈਲੋਟੇਲ ਵਿਚ, ਇਹਦਾ ∞ ਮਲਟੀਪਲਿਸਿਟੀ n ਦਾ ਰੂਟ ਹੈ।

ਸੋ n-ਸਵੈਲੋਟੇਲ $\heartsuit_n$ ਹੈ ਸਪੇਸ ਸਾਰੀਆਂ x ਵਿਚ ਡਿਗਰੀ n ਦਿਆਂ ਇਕੁਏਸ਼ਨਜ਼ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ n ਭਿੰਨ ਐਕਸਟੈਂਡਿਡ ਰੀਅ਼ਲ ਰੂਟ ਹਨ, ਮਤਲਬ, ਡਿਗਰੀ n ਯਾਂ $n-1$ ਦਿਆਂ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਰੂਟ ਰੀਅਲ ਤੇ ਭਿੰਨ ਹਨ। ਪਹਲੇ ਓਪਣ n-ਸੈਲ Σ_n ਦਾ ਕਲੋਯਰ ਹੈ $\overline{\heartsuit}_n$ ਤੇ ਦੂਜੇ $(n-1)$-ਸੈਲ Σ_{n-1} ਦਾ ਹੈ ਸਬਸੈਟ $\overline{\heartsuit}_{n-1} \subset \overline{\heartsuit}_n$ ਜੋ ਇਨਕਲੁਯਣਜ਼ ਬੇਬੀ ਐਕਸ਼ਨਜ਼ ਨਹੀਂ ਪਰੀਜ਼ਰਵ ਕਰਦੇ। ਇਹ ਵਧਦੀਆਂ ਸਪੇਸਿਸ ਦਾ ਅਨੰਤ ਯੁਨੀਅਣ ਦਿੰਦਾ ਹੈ ਸਾਣੂੰ ਸਪੇਸ $\overline{\heartsuit}_\infty$ ਸਾਰੀਆਂ x ਵਿਚ ਇਕੁਏਸ਼ਨਾਂ ਦੀ ਜਿਨਹਾਂ ਦੇ ਸਭ ਰੂਟ ਰੀਅਲ ਹਨ ਜੋ ਸਪੇਸ ਕੌਨਟਰੈਕਟੀਬਲ ਹੈ। ਸਵੈਲੋਟੇਲਜ਼ ਸ਼ਾਇਦ ਕਾਫ਼ੀ ਹਨ ਕਿਣੇ ਨਤੀਜੇਆਂ ਲਈ ਜੋ ਕੌਮਪਲੈਕਸੀਫ਼ਾਇਡ ਬੇਬੀ ਯਾਣੀ ਕਿ ਪੀਕਾਰ-ਲੈਫ਼ਸਸ਼ੈਟਸ ਐਕਸ਼ਨ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਰਾਂਹੀ ਸਿਧ ਕਿਤੇ ਗਏ ਹਨ।

ਜੇ ਆਪਾਂ ਡੁਅਲ ਅਗਿਆਤ ਵਰਤਦੇ ਤਾਂ ਸਵੈਲੋਟੇਲ $\heartsuit_n$ ਤੇ ਓਹੀ ਰਹੰਦੀ ਪਰ ਸੈਲ Σ_n ਅਤੇ Σ_{n-1} ਜਿਨਹਾਂ ਦੀ ਇਹ ਡਿਸਜੌਐਂਟ ਯੁਨਿਅਣ ਹੈ ਬਦਲ ਜਾਂਦੇ। ਕਿਉਂਕਿ, ਕਿਸੀ ਇਕੁਏਸ਼ਨ ਦੀ ਡੁਅਲ ਮਿਲਦੀ ਹੈ x ਦੀ ਥਾਂ $1/$x ਪੁਟ ਕਰਣ ਬਾਦ ਡੀਨੌਮੀਨੈਟਰ ਸਾਫ਼ ਕਰਕੇ। ਯਾਣੀ ਕਿ, ਇਹ ਓਹ ਇਕੁਸ਼ਨ ਹੈ ਜਿਹਦੇ ਰੂਟ ਦਿੱਤੀ ਇਕੁਏਸ਼ਨ ਦੇ ਰੂਟਾਂ ਦੇ ਇਨਵਰਸ ਹਨ। ਐਂਵੇਂ ਹੀ ਅਸੀਂ ਸਕੂਲੇ x ਦੀ ਥਾਂ $-$x ਪੁਟ ਕਰਦੇ ਰੂਟਾਂ ਦਾ ਸਾਇਣ ਬਦਲਦੇ ਸਾਂ, ਸਭ ਰੂਟਾਂ ਵਿਚੋਂ ਇਕੋ a ਮਨਫ਼ੀ ਕਰਣ ਲਈ x ਦੀ ਥਾਂ x$+a$ ਲਿਖਦੇ ਸਾਂ, ਤੇ ਸਭ ਨੂੰ ਇਕੋ ਨੌਨਜ਼ੀਰੋ ਨੰਬਰ b ਨਾਲ ਤਕਸੀਮ ਦੇਣ ਲਈ x ਦੀ ਥਾਂ bx ਸਬਸਟੀਚੁਟ ਕਰਦੇ ਸਾਂ। ਸੋ ਸਕੂਲੀ ਗਣਿਤ ਤੋਂ ਹੀ ਜ਼ਾਹਿਰ ਹੈ ਕਿ ਇਕੁਏਸ਼ਨਜ਼ ਦੇ ਸੰਧਰਭ ਵਿਚ ਨੰਬਰ ਰੇਖਾ ਨੂੰ ਪੂਰਾ ਕਰ $\widehat{L}$ ਦੀ ਬੇਬੀ ਯਾਂ ਮੋਬੀਅਸ ਜਮੈਟਰੀ $\mathcal{G}$ ਇਸਤਮਾਲ ਕਰਣੀ ਚਾਹਿਦੀ ਹੈ।

ਇਸ ਬੇਬੀ ਜਮੈਟਰੀ ਦੀ ਹੋਮੋਜੈਨਾਏਟੀ ਉਭਰ ਆਈ ਸੀ ਇਹਨੂੰ ਇਕ ਗੋਲ ਰੈਫ਼ਲੈਕਸ਼ਨ ਉਪਰਾਂਤ L ਦੇ ਟੈਂਜੈਂਟ ਯੁਨਿਟ ਸਰਕਲ ਉਤੇ ਵਿਚਾਰਣ ਨਾਲ। ਤੇ ਨਾਲ ਹੀ ਮਿਲ ਗਿਆ ਸੀ ਐਸ ਦੀਆਂ ਰੋਟੇਸ਼ਨਜ਼ ਦਾ ਸਬਗਰੁਪ $S^1 \subset \mathcal{G}$। ਜਿਸ ਦਾ ਬੇਬੀ, ਯਾਣੀ ਕਿ ਸਬਸਟੀਚੁਸ਼ਨਜ਼ ਨਾਲ, ਐਕਸਨ ਫ਼ੋਲੀਏਟ ਕਰ ਦਿੰਦਾ ਜੀ ਸਵੇਲੋਟੇਲ ਨੂੰ ਸਰਕਲਜ਼ ਵਿਚ। ਸੈਲ Σ_{n-1} ਨੂੰ ਵੀ $\heartsuit_n$ ਦਾ ਹਰ S^1-ਓਰਬਿਟ ਕਟਦਾ ਹੈ ਤੇ n ਦੇ ਹਰ ਡੀਵਾਈਜ਼ਰ ਜਿਨੀ ਵਾਰ ਕਟ ਸਕਦਾ ਹੈ :- ਮਸਲਨ Σ_1 ਨੂੰ ਮੋਬੀਅਸ ਸਟਰਿਪ $\heartsuit_1$ ਦਾ ਗੱਭਲਾ $z_1 = -z_2$ ਓਰਬਿਟ ਸਿਰਫ਼ ਇਕੋ ਵਾਰ ਕਟਦਾ ਹੈ, ਪਰ ਬਾਕੀ ਦੋ ਵਾਰ; ਐਂਵੇਂ ਹੀ ਕਿਸੀ n ਲਈ ਕਿਨੀ

ਵਾਰ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦਾ ਹੈ ਕਿਨਾ ਰੈਗੁਲਰ ਹੈ n–ਗੋਨ $z_1 \ldots z_n z_1$। $\square$

ਕਲੋਜ਼ਡ ਮੋਬੀਅਸ ਸਟਰਿਪ $\overline{\heartsuit}_2$ ਦਾ ਬਾਉਂਡਰੀ ਸਰਕਲ, ਦੋਨੋ ਰੁਟਸ ਬਰਾਰਰ, ਅਤੇ ਇਹਦੇ ਪੌਐਂਟ, ਦੋਨੋ ਰੂਟਸ ∞, ਤੇ Σ_1 ਦਾ ਯੁਣੀਣਨ ਸਰਕਲ $\overline{\heartsuit}_1$ ਬਣਾਂਦੇ ਹਨ ਇਕੱਠੇ ਇਕ ਆਠਾ 8।

ਐਸਾ ਆਠਾ ਸੌਲਿਡ ਟੋਰਸ $\overline{\heartsuit}_3$ ਦੀ ਬਾਉਂਡਰੀ ਉਤੇ ਨੂੰ ਇਨਟੀਰੀਅਰ $\heartsuit_3$ ਦੇ 2–ਸੈਲ Σ_2 ਵਿਚ ਜੋੜ ਬਣਦੀ ਹੈ ਕਲੋਜ਼ਡ ਮੋਬੀਅਸ ਸਟਰਿਪ $\overline{\heartsuit}_2 \subset \overline{\heartsuit}_3$। ਸਵੈਲੋਟੈਲ $\heartsuit_3$ ਦਾ ਹਰ ਪੌਐਂਟ ਤਿਣ ਐਸੀਆਂ ਮੋਬੀਅਸ਼ ਸਟਰਿਪਸ ਦਾ ਇੰਟਰਸੈਕਸ਼ਨ ਹੈ : – ਸੈਲ Σ_2 ਸੀ ਸਾਰੀਆਂ ਕੀਉਬਿਕਸ ਜਿਨਹਾਂ ਦਾ ਇਕ ਰੂਟ ∞ ਹੈ; ਲੈ ਲੋ ਹੁਣ ਐਸੇ ਓਹ ਤਿਣ 2–ਸੈਲ ਸਾਰੀਆਂ ਕੀਉਬਿਕਸ ਦੇ ਜਿਹਨਾਂ ਦਾ ਇਕ ਰੂਟ ਹੈ a, b ਯਾਂ c ਜਿਥੇ ਇਹ ਤਿਣ ਹਨ ਦਿੱਤੀ ਕੀਉਬਿਕ ਦੇ ਤਿਣ ਵਖਰੇ ਰੂਟ। $\square$

ਇਹ ਹੀ ਖੇਲ n–ਸਵੈਲੋਟੇਲ $\heartsuit_n$ ਵਿਚ ਚਲਦਾ ਹੈ। ਹਰ ਐਕਸਟੈਂਡਿਡ ਰੀਅਲ ਨੰਬਰ a ਪਿਛੇ ਹੈ ਇਹਦੇ ਵਿਚ $(n-1)$–ਸੈਲ ਜੋ ਬਣਾਂਦੀਆਂ ਹਨ ਸਾਰੀਆਂ ਇਕੁਏਸ਼ਨਜ਼ ਜਿਨਹਾਂ ਦਾ a ਇਕ ਰੂਟ ਹੈ। ਵਿਪ੍ਰੀਤ ਪੇਅਰ–(ਯਾਂ 2)–ਵਾਇਜ਼ ਡਿਸਜੌਐਂਟ $(n-1)$–ਸੈਲਜ਼ ਜੋ ਸਨ $\prod z_1 \ldots z_n$ ਦੇ ਫ਼ਾਈਬਰ, ਇਹ ਸੈਲਜ਼ ਦਾ ਟੱਬਰ ਹੈ ਸਿਰਫ਼ $(n+1)$–ਵਾਇਜ਼ ਡਿਸਜੌਐਂਟ ਪਰ $\heartsuit_n$ ਦਾ ਹਰ ਪੌਐਂਟ ਹੈ n ਐਸੇ ਸੈਲਜ਼ ਦਾ ਇੰਟਰਸੈਕਸ਼ਨ। ਅੱਗੇ, ਲ਼ੇ ਲਓ ਹਰ ਤਿਣ ਸੈਲਜ਼ ਦਾ ਇੰਟਰਸੈਕਸ਼ਨ, ਬੇਬੀ ਗਰੁਪ $\mathcal{G}$ ਟਰਾਂਜ਼ਟਿਵਲੀ ਐਕਟ ਕਰਦੈ ਇਹ ਟਰਿਪਲ ਇੰਟਰਸੈਕਸ਼ਨਜ਼ ਦੇ ਟੱਬਰ ਤੇ, ਸੋ $n \leq 3$ ਲਈ $\heartsuit_n$ ਇਕੋ $\mathcal{G}$–ਓਰਬਿਟ ਹੈ :- ਦਿੱਤੇ ਕੋਈ ਤਿਨ ਨੰਬਰਾਂ ਚੋਂ ਕਿਸੀ ਨੂੰ ਇਨਵਰਸ਼ਨ ਨਾਲ ਮੈਪ ਕਰਦੋ ∞ ਉਤੇ, ਇਹਨੂੰ ਫ਼ਿਕਸਡ ਰਖਦੇ ਦੂਜੇ ਦੋਆਂ ਚੋਂ ਕਿਸੀ ਨੂੰ ਲਾਇਣ ਦੀ ਆਈਸੋਮੈਟਰੀ ਨਾਲ ਮੈਪ ਕਰ ਦੋ 0 ਉਤੇ ਸਚ ਦੈਟ ਤੀਜਾ ਹੁਣ ਐਸ ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਹੈ, ਆਖਰ ∞ ਤੇ 0 ਦੋਆਂ ਨੂੰ ਫ਼ਿਕਸਡ ਰਖਦੇ ਇਕ ਹੌਮੋਥੈਟੀ ਇਹ ਤੀਜੇ ਨੂੰ ਬਣਾ ਦਊ 1। $\square$

ਮੈਂ ਬਹੁਤ ਹੀ ਸ਼ੁਕਰਗੁਜ਼ਾਰ ਹਾਂ ਕਰਤਾ ਪੁਰਖੁ ਦੀ ਬਖਸੀਸ ਦਾ, ਅਤੇ ਜੇ ਓਹਨੂੰ ਮਰਜ਼ੀ ਹੋਈ ਇਹ ਕਹਾਨੀ ਹੋਰ ਕੁਝ ਅੱਗੇ ਤੋਰਣ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੂੰਗਾ।

ਕੇ ਐਸ ਸਰਕਾਰੀਆ ੧੧-੩੦ ਅਪਰੈਲ ੨੦੧੯

(ਭਾਗ ਪੰਜਵੇਂ ਦੀ ਚਲ ਰਹੀ ਹੈ ਟਾਈਪਿੰਗ)