੫੭. ਜ਼ਰੂਰਤ ਤੋਂ ਕੁਝ ਜ਼ਿਆਦਾ ਸਿਧ ਕਰ ਦਿੱਤਾ ਉਤੇ! ਯਾਣੀ ਕਿ, $\widehat{L}$ ਦੇ ਕਿਸੀ ਓਰਡੱਰਡ ਟਰਿਪਲ ਤੋਂ ਕਿਸੀ ਹੋਰ ਤੇ ਲੈ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਸਾਨੂ $\mathcal{G}$, ਜਿਥੇ ਕਿ, ਜਾਣਾ ਸੀ ਸਾਨੂ ਸਿਰਫ਼ ਕਿਸੀ ਅਨਓਰਡੱਰਡ ਟਰਿਪਲ ਤੋਂ ਕਿਸੀ ਹੋਰ ਤੇ। ਇਹ ਕੰਮ $\mathcal{G}$ ਦਾ ਓਰੀਅਣਟੇਸ਼ਨ ਪਰੀਜ਼ਰਵਿੰਗ ਸਬਗਰੁਪ $\mathcal{G}_0$ ਵੀ ਕਰ ਦਿੰਦਾ ਹੈ, ਜੋ ਦੂਜੇ ਓਰੀਅਣਟੇਸ਼ਨ ਰੀਵਰਸਿੰਗ ਕੌਮਪੋਨੈਂਟ ਨਾਲ $\heartsuit_3$ ਵਾਂਗ ਟੋਪੋਲੋਜਿਕਲੀ ਓਪਣ ਸੋਲਿਡ ਟੋਰਸ ਹੀ ਹੈ; ਅੱਗੇ, $\mathcal{G}_0$ ਦਾ ਬੇਬੀ ਐਕਸ਼ਨ ਕਵਰ ਕਰਦਾ ਹੈ ਸਵੈਲੋਟੇਲ $\heartsuit_3$ ਨੂੰ ਤਿਣ ਵਾਰ:- $\mathcal{G}_0$ ਦੀ ਹਰ ਟਰਾਂਸਫ਼ੋਰਮੇਸ਼ਨ ਨੂੰ ਆਪਾਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਇਕ ਰੋਟੇਸ਼ਨ, ਜ਼ਰਬੇ ∞ ਨੂੰ ਫ਼ਿਕਸਡ ਰਖਦੀ ਇਕ ਟਰਾਂਸਲੇਸ਼ਨ, ਜ਼ਰਬੇ 0 ਤੇ ∞ ਦੋਣਾਂ ਨੂੰ ਫ਼ਿਕਸਡ ਰਖਦੀ ਇਕ ਹੋਮੋਥੈਟੀ। ਅੱਗੇ, ਛੇ ਹੀ ਐਲੀਮੈਂਟ ਹਨ $\mathcal{G}$ ਦੇ ਜੋ ਕਿਸੀ ਓਰਡੱਰਡ ਸੈਟ (a,b,c) ਨੂੰ ਐਸ ਦਿਆਂ ਛੇ ਪਰਮੁਟੇਸ਼ਨਜ਼ ਤੇ ਮੈਪ ਕਰਦੇ ਹਨ, ਇਹਨਾਂ ਚੋਂ ਤਿਣ ਜਿਹੜੇ ਈਵਣ ਪਰਮੁਟੇਸ਼ਨਜ਼ ਤੇ ਲੈ ਜਾਂਦੇ ਹਨ ਓਹ ਹੀ $\mathcal{G}_0$ ਵਿਚ ਹਨ। □

ਸਾਫ਼ ਹੈ ਕਿ ਬੇਬੀ ਗਰੁਪ $\mathcal{G}$ ਤੇ ਸਿੰਪਲ ਸਬਗਰੁਪ $\mathcal{G}_0$ ਹੀ ਕੁਦਰਤੀ ਹਨ, ਦੂਜੇ ਦੇ ਮੈਕਸੀਮਲ ਕੋਮਪੈਕਟ ਯਾਂ ਮੈਕਸੀਮਲ ਏਬੀਲੀਅਣ ਸਬਗਰੁਪ S^1 ਦੇ ਸਾਰੇ ਕੋਨਜੁਗੇਟ ਬਰਾਬਰ ਹਕਦਾਰ ਹਨ ਸਾਡੀ ਤਵੱਜੋ ਦੇ। ਸੋ ਲਓ ਕੁਝ $\mathcal{G}_0$ ਦੇ ਐਕਸ਼ਨ ਥੱਲੇ $\heartsuit_n, n \geq 3$ ਦੀ ਫ਼ੋਲੀਏਸ਼ਨ ਬਾਰੇ :- ਇਹ ਐਕਸ਼ਨ ਰੂਟਾਂ ਦਾ ਸਾਈਕਲਿਕ ਓਰਡਰ ਕਾਇਮ ਰਖਦਾ ਹੈ। ਸੋ ਓਰਬਿਟਸ ਜੋ ਹਨ ਓਪੈਨ ਸੋਲਿਡ 3-ਟੋਰਾਈ ਤੇ $\mathcal{G}_0$-ਐਕਸ਼ਨ ਓਹਣਾਂ ਨੂੰ n ਦੇ ਕਿਸੀ ਡੀਵਾਈਜ਼ਰ ਜਿੱਨੀ ਵਾਰ ਕਵਰ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਕਿਹੜਾ ਡੀਵਾਈਜ਼ਰ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦਾ ਹੈ ਐਸ ਤੇ ਕਿ $\mathcal{G}_0$ ਦੇ ਐਕਸ਼ਨ ਤਕ ਸਾਈਕਲਿਕ ਗਰੁਪ $\mathbb{Z}_n$ ਦਾ ਕਿਹੜਾ ਸਬਗਰੁਪ ਦਿੰਦਾ ਹੈ ਪੋਲੀਗਨ $conv(z_1, \ldots z_n)$ ਦੀ ਸਬ ਤੋਂ ਜ਼ਿਆਦੀ ਰੈਗੁਲੈਰੇਟੀ। □

ਨਾਂ ਸਿਰਫ਼ $n = 3$ ਪਰ $n = 4$ ਲਈ ਵੀ ਡੀਵਾਈਜ਼ਰ 1 ਨਹੀਂ ਸੰਭਵ ਐਸ ਕਵਰਿੰਗ ਨਤੀਜੇ ਵਿਚ, $\mathcal{G}_0$ ਦਾ ਸਵੈਲੋਟੇਲ $\heartsuit_4$ ਉੱਤੇ ਐਕਸ਼ਨ ਇਕ ਓਪੈਣ ਸੋਲਿਡ ਟੋਰਲ ਪੱਤੇ ਨੂੰ 4 ਬਾਰ ਕਵਰ ਕਰਦਾ ਹੈ, ਅਤੇ ਬਾਕੀ ਸੱਭ ਨੂੰ 2 ਬਾਰ :- ਕਿਸੀ ਇਕੁਏਸ਼ਨ ਉੱਤੇ ਲਗਾ ਕੇ ਰੋਟੇਸ਼ਨ ਤੇ ਟਰਾਂਸਲੇਸ਼ਨ ਆਪਾਂ ਨੂੰ ਮਿਲ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਇਕੁਏਸ਼ਨ ਵਿਦ ਰੂਟਸ $\{x_1 < 0, x_2 = 0, x_3 > 0, x_4 = \infty\}$, ਤੇ ਲਗਾਕੇ 0 ਤੇ ∞ ਨੂੰ ਫ਼ਿਕਸਡ ਰਖਦੀ ਇਕ ਹੋਮੋਥੈਟੀ ਆਪਾਂ ਮਣ ਸਕਦੇ ਹਾਂ $x_1 x_3 = -4$। ਗੌਰ ਫ਼ਰਮਾਓ ਹੁਣ ਇਹਨਾਂ ਨਾਲ ਬੰਧੇ S^1 ਦੇ ਪੌਐਂਟ $z_1, z_2 = T, z_3, z_4 = -T$। ਕੋਨਡੀਸ਼ਨ $|x_1|/2 = 2/x_3$ ਦਸਦੀ ਹੈ ਕਿ ਕੌਰਡ $z_1 z_3$ ਗੋਲ ਸ਼ੀਸ਼ੇ ਦੇ ਸੈਂਟਰ $-T$ ਤੇ ਨੱਬੇ ਡਿਗਰੀ ਦਾ ਐਂਗਲ ਬਣਾਂਦੀ ਹੈ। ਸੋ $z_3 = -z_1$ ਵੀ ਐਂਟੀਪੋਡਲ ਹਨ। ਪਹਲਾ ਕੇਸ ਓਦੋਂ ਤੇ ਓਦੋਂ ਹੀ ਵਾਪਰਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਵਿਆਸ $z_1 z_3$ ਵਰਟੀਕਲ ਹੈ। □

ਸੋ ਕੁਝ ਇਹ ਤਸਵੀਰ ਸਾਮਣੇ ਆਂਦੀ ਹੈ, $\heartsuit_4$ ਦੇ ਹਰ ਸੌਲਿਡ ਟੋਰਲ $\mathcal{G}_0$-ਓਰਬਿਟ ਥੱਲੇ ਹੈ ਮੋਬੀਅਸ ਸਟਰਿਪ $\heartsuit_2$ ਦਾ ਇਕ ਅੱਧੀ ਸਪੀਡ ਨਾਲ ਚਲਦਾ S^1-ਓਰਬਿਟ :- ਵਿਆਸ $z_1 z_3$ ਤੇ $z_2 z_4$ ਦਰਮੀਆਨ ਐਂਗਲ $0 < \theta \leq \pi/2$ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ $\mathcal{G}_0$-ਓਰਬਿਟ। ਥੱਲੇ S^1-ਓਰਬਿਟ ਤੇ ਹੈ ਓਹ ਕਵਾਡਰੇਟਿਕ ਜਿਹਦੇ ਦੋ ਰੂਟਸ ਨਾਲ ਬੰਧੇ S^1 ਉਤੇ ਪੌਐਂਟਸ ਹਨ $z_1^2 = z_3^2$ ਤੇ $z_2^2 = z_4^2$। ਜਿਹਨਾਂ ਦਰਮੀਆਨ ਐਂਗਲ ਹੈ 2θ, ਗੱਭਲੀ ਓਰਬਿਟ ਲਈ π, ਤੇ ਸਟਰਿਪ ਦੀ ਬਾਉਂਡਰੀ ਵਲ 0 ਨੇੜੇ। □

ਹੋਰ ਵੀ ਅੱਧੂਰੀ ਹੈ ਅਜੇ ਮੇਰੀ ਸਮਝ ਐਸ ਤਿਣ-ਡਾਈਮੈਨਸ਼ਨੀ ਪੱਤੇਆਂ ਵਾਲੀ ਬੇਬੀ ਫ਼ੋਲੀਏਸਨ ਦੀ ਜੇ $n > 4$, ਪਰ ਐਣਾ ਤਾਂ ਸਾਫ਼ ਹੈ ਕਿ, ਹਰ $\heartsuit_n$ ਦੇ ਪੱਤੇ ਵਿਚ ਹੈ ਜ਼ਰੂਰ ਇਕ ਇਕੁਏਸਨ ਜਿਹਦੇ ਰੂਟ ਹਨ ਕਰਮਵਾਰ $\{0, 1, x_3, \ldots, x_{n-1}, \infty\}$:- ਪੱਤੇ ਦੀ ਕੋਈ ਵੀ ਇਕੁਏਸ਼ਨ ਜਿਹਦੇ ਕਿਸੀ ਵੀ ਰੂਟ ਤੋਂ ਚਲਦੇ ਸਰਕਲ $\widehat{L}$ ਦੇ ਇਸ ਸਾਈਕਲਿਕ ਓਰਡਰ ਵਿਚ ਕਰਮਵਾਰ ਰੂਟ ਹਨ $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ ਤੇ ਲਗਾਓ $\mathcal{G}_0$ ਦੀ ਇਕਲੌਤੀ ਟਰਾਂਸਫ਼ੌਰਮੇਸ਼ਨ ਸੱਚ ਦੇਟ $y_1 \mapsto 0, y_2 \mapsto 1, y_n \mapsto \infty$। □

ਇਹ ਇਕਲੌਤੀ $y \mapsto x = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} \cdot \frac{y_n-y_2}{y_n-y}$ ਵਜਦੀ ਹੈ 4-ਟੱਪਲ (y_1, y_2, y, y_n) ਦੀ ਕਰੌਸ-ਰੇਸ਼ੋ, ਅੱਤੇ ਐਸ ਡੈਫ਼ੀਨੇਸ਼ਨ ਤੋਂ ਜ਼ਾਹਿਰ ਹੈ ਕਿ ਇਹ $\mathcal{G}_0$-ਐਕਸ਼ਨ ਥੱਲੇ ਇਨਵੇਰੀਐਂਟ ਹੈ। ਨੋਟ ਸੈਗਮੈਂਟ ਯਾਂ ਅੱਧ ਰੇਖਾ (y_1, y_n) ਦੇ ਕੋਈ 2-ਟੱਪਲ (y_2, y) ਵਿਚ ਕੇਅਲੀ ਡਿਸਟੈਂਸ ਵੀ ਇਹ ਹੀ ਰੇਸ਼ੋ ਸੀ, ਸਿਰਫ਼ ਐਡੀਟਿਵ ਬਣਾਨ ਲਈ ਅੱਗੇ $\log$ ਆਦਿ ਲਿਖ ਦਿਤਾ ਸੀ। ਜਿਸ ਦੇ ਸਹਾਰੇ ਕਿਸੀ ਓਪੈਣ ਯੁਕਲਿਡੀਅਣ ਕੋਨੇਕਟਿਡ ਸੈਟ U, ਜਿਹਦੇ ਵਿਚ ਨਹੀਂ ਕੋਈ ਪੂਰੀ ਰੇਖਾ, ਦੇ ਕਿਸੀ ਵੀ 2-ਟਪਲ ਵਿਚ ਅਸੀਂ ਡੀਫ਼ਾਇਨ

ਕੀਤੀ ਸੀ ਰੈਲੈਟਿਵਿਸਟਿਕ ਦੂਰੀ। ਪਰ ਜੇ ਸਾਨੂ ਕੋਈ ਵੀ ਬਾਉਣਡਰੀ ਬੰਦਿਸ਼ ਦਾ ਸਹਾਰਾ ਨਹੀਂ ਕਬੂਲ ਤਾਂ ਸ਼ਾਇਦ 2-ਟਪਲ ਛੱਡ ਸਾਰੇ 4-ਟਪਲ ਵਿਚਾਰਣੇ ਚਾਹੀਦੇ ਹਨ : ਕਿਸੀ ਵੀ ਡੀਮੈਨਸ਼ਨ n ਦੇ ਸਫ਼ੀਅਰ $\widehat{E}$ ਦੇ ਕੋਈ ਵੀ 4-ਟਪਲ (P, Q, R, S) ਨਾਲ ਬੰਧੀ ਹੈ ਕਰੌਸ-ਰੇਸ਼ੋ $\frac{PR}{PQ} \cdot \frac{QS}{RS}$ ਅਤੇ ਬਾਈਜੈਕਸ਼ਣ ਜੋ ਇਹਣਾਂ ਨੂੰ ਪਰੀਜ਼ਰਵ ਕਰਦੇ ਹਨ ਓਹ ਹੀ ਹਨ $\widehat{E}$ ਦੇ ਸਾਰੇ ਮੋਬੀਅਸ ਟਰਾਂਸਫ਼ੌਰਮੈਸ਼ਨ।

ਪਲਟਦੇ, $\heartsuit_n$ ਦੇ ਕਿਸੀ ਪੱਤੇ ਵਿਚ ਇਕੁਏਸ਼ਨਜ਼ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਰੂਟ ਹਨ $\{0, 1, x_3, \ldots, x_{n-1}, \infty\}$ ਜਾਪਦਾ ਹੇ ਕਿ ਇਹਨਾਂ ਦੀ ਕੁਲ ਤੈਦਾਦ n ਦਾ ਕੋਈ ਡੀਵਾਈਜ਼ਰ ਹੈ :- ਕਰੌਸ-ਰੇਸ਼ੋ ਦੀ ਇਨਵੇਰੀਐਂਸ ਦਰਸਾਉਂਦੀ ਹੈ ਕਿ ਸਾਡੀ ਡੈਫ਼ੀਨੈਸ਼ਨ ਨਹੀਂ ਡੀਪੈਂਡ ਕਰਦੀ ਕਿਸ ਪੱਤੇ ਵਿਚ ਇਕੁਏਸ਼ਨ ਤੋਂ ਅਸੀ ਚੱਲੇ ਸੀ, ਪਰ ਹਾਂ, ਇਹ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦੀ ਹੈ ਇਹਦੇ ਕਿਹੜੇ ਰੂਟ $y_1 \in \widehat{L}$ ਨੂੰ ਆਪਾਂ ਐਸ ਸਰਕਲ ਉੱਤੇ ਪਹਲਾ ਮਣ ਲਿੱਤਾ ਸੀ। ਸੋ ਆਪਾਂ ਚਲ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਐਸੀ ਪੱਤੇ ਵਿਚ ਇਕੁਏਸ਼ਨ ਤੋਂ ਜਿਹਦੇ ਰੂਟਸ ਨਾਲ ਬੰਧੇ S^1 ਦੇ ਪੌਐਂਟਸ ਸਭ ਤੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਸੀਕਲਿਕਲੀ ਸੀਮੈਟਰਿਕ ਹਨ। □

ਮਸਲਣ, $\heartsuit_4$ ਦੇ ਕਿਸੀ ਪੱਤੇ ਵਿਚ ਹਦ ਦੋ ਹਨ ਵਿਦ ਰੂਟਸ $\{0, 1, t$ ਯਾਂ $\frac{t}{t-1}, \infty\}$, ਸੋ ਇਹ ਬੇਬੀ ਫ਼ੋਲੀਏਸ਼ਨ ਦੇ ਪੱਤੇਆਂ ਦੀ ਸਪੈਸ ਹੈ $(1, \infty)$ ਦਾ ਇਨਵੋਲੁਸ਼ਨ $x \to \frac{x}{x-1}$ ਥੱਲੇ ਕੋਸ਼ੈਂਟ :- ਸਾਡੀ ਡੈਫ਼ੀਨੈਸ਼ਨ ਦੇਖਣ ਨੂੰ ਦਿੰਦੀ ਹੈ ਚਾਰ ਇਕੁਏਸ਼ਨਜ਼ ਵਿਦ ਰੂਟਸ $\{0, 1, t_i, \infty\}, i \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ਜਿਥੇ t_i ਹੈ ਕਰੌਸ-ਰੇਸ਼ੋ 4-ਟਪਲ $(y_i, y_{i+1}, y_{i+2}, y_{i+3})$ ਦੀ। ਕਰੌਸ-ਰੇਸ਼ੋ ਦੀ ਇਨਵੇਰੀਐਂਸ ਸਦਕੇ ਇਹਨਾਂ ਚੋਂ ਪਹਲੀ ਇਕੁਏਸ਼ਨ ਵੀ ਅਸੀਂ ਇਸਤਮਾਲ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਜੇ $t_1 = t$ ਤਾਂ ਇਹ ਦਿੰਦਾ ਹੈ $t_2 = \frac{\infty-1}{t-1} \cdot \frac{0-t}{0-\infty} = \frac{t}{t-1}$, $t_3 = \frac{0-t}{\infty-t} \cdot \frac{1-\infty}{1-0} = t,\ t_0 = \frac{1-\infty}{0-\infty} \cdot \frac{t-0}{t-1} = \frac{t}{t-1}$। □

ਸੋ $\heartsuit_4$ ਦੇ ਪੱਤੇ ਦਿੰਦੇ ਹਨ ਇਹ $t \in (1, 2]$ ਯਾ ਓਹ $\theta \in (0, \pi/2]$ ਅੱਤੇ $\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{t-1}$:- ਲਗਾ ਕੇ ਟਰਾਂਸਲੇਸ਼ਨ $x \mapsto x - 1$ ਰੂਟਸ $\{0, 1, t, \infty\}$ ਬਣ ਜਾਂਦੇ ਨੇ $\{-1, 0, t-1, \infty\}$, ਫ਼ੇਰ ਹੌਮੋਥੈਟੀ $x \mapsto \frac{2}{\sqrt{t-1}}$ ਦਿੰਦੀ ਹੈ $\{-\frac{2}{\sqrt{t-1}}, 0, 2\sqrt{t-1}, \infty\}$, ਜਿਹਦੇ S^1 ਵਿਚ ਕਵਾਡਰੀਲੈਟਰਲ ਦੇ ਦੋਣੋਂ ਡਾਇਗਨਲ ਵਿਆਸ ਹਨ। ਓਹਣਾਂ ਦਰਮੀਆਣ ਐਂਗਲ θ ਦੁਗਣਾ ਹੈ ਓਸ ਐਂਗਲ ਦਾ ਜੋ ਹੋਰੀਜ਼ੋਂਟਲ ਨਾਲ $(-1, 0)$ ਤੇ $(1, 2\sqrt{t-1})$ ਜੋੜਦੀ ਲਾਇਨ ਬਣਾਂਦੀ ਹੈ। □

ਲੱਗਦਾ ਹੈ ਇਹੋ ਸਪੈਸ਼ਲ ਇਕੁਏਸ਼ਨਜ਼ $\{0, 1, x_3, \ldots, x_{n-1}, \infty\}$ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਤੇ ਕੁਝ ਹੋਰ ਤਰੱਦਦ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਸਮਝ ਹੀ ਲਵਾਂਗੇ ਕੀਸੀ ਵੀ $\heartsuit_n$ ਦੇ ਪੱਤੇਆਂ ਦੀ ਸਪੇਸ। ਪਰ ਇਹ ਰਾਹ ਪੈਣ ਤੋਂ ਪਹਲਾਂ ਅਸੀਂ ਯਾਦ ਕਰਦੇ ਹਾਂ - ਦੇਖੋ (੫੦.੩੮-੯) - ਕਿ ਇਹਣਾਂ ਦਿਆਂ ਹਾਫ਼-ਟਰਨਜ਼ ਟਾਈਲਿੰਗਜ਼ ਵੀ ਸਪੈਸ਼ਲ ਹਨ ਜਿਸ ਤੋਂ ਸਾਫ਼ ਨਜ਼ਰ ਆਣ ਲਗ ਪੈਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਹੋਰ ਨਹੀਂ ਤਾਂ ਕੋਈ ਐਸੀ ਇਕੁਏਸ਼ਨ ਨੂੰ ਹਲ ਕਰਣ ਲਈ ਤਾਂ ਇਕ ਹਾਈਪਰਇਲਿਪਟਿਕ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੇ ਪੀਰੀਅਡਜ਼ ਦੀ ਕੈਲਕੁਲੇਸ਼ਨ ਕਾਫ਼ੀ ਹੋਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ। ਅੱਗੇ ਜ਼ਾਹਿਰ ਹੈ ਕਿ ਐਫ਼ਾਇਣ $(n-3)$-ਸਵੈਲੋਟੇਲ ਦੀ ਕੋਈ ਦਿੱਤੀ ਇਕੁਏਸ਼ਣ ਨੂੰ ਹਲ ਕਰਣ ਦੀ ਜਗਹ ਆਪਾਂ ਹਲ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਇਕ n-ਸਵੈਲੋਟੇਲ ਦੀ ਸਪੈਸ਼ਲ ਇਕੁਏਸ਼ਨ।

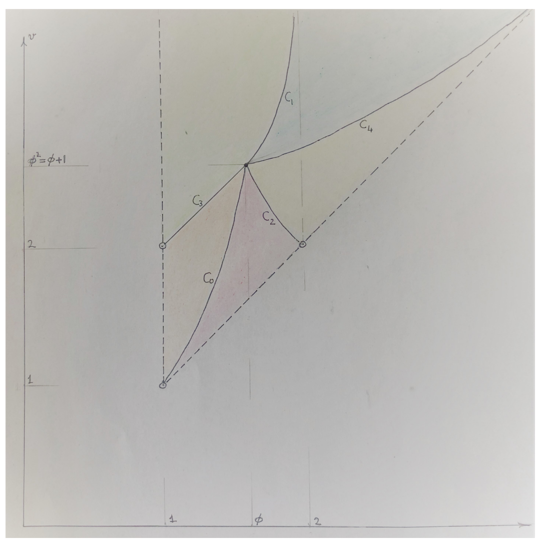
ਸਵੈਲੋਟੇਲ $\heartsuit_5$ ਦੇ ਕੋਈ $\mathcal{G}_0$ ਓਰਬਿਟ ਵਿਚ ਹੈ ਜ਼ਰੂਰ ਇਕ ਕਵਿੰਟਿਕ ਜਿਹਦੇ ਰੂਟ ਹਨ ਕਰਮਵਾਰ $\{0, 1, u, v, \infty\}$ ਅੱਤੇ ਨਾਲ ਹਦ ਹੋਰ ਚਾਰ ਸਪੈਸ਼ਲ ਇਕੁਏਸ਼ਨਜ਼ ਜੋ ਮਿਲ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ ਇਹਦੇ ਕੋਈ ਤਿਨ ਹੋਰ ਸੀਕਲਿਕਲੀ ਕਰਮਵਾਰ ਰੂਟਾਂ ਨੂੰ $(\infty, 0, 1)$ ਬਣਾ ਕੇ। ਓਹੀ ਕਰੌਸ ਰੈਸ਼ੋ ਕੈਲਕੂਲੇਸ਼ਨਜ਼ ਨਾਲ ਇਹ ਹਨ ਦੂਜੀ $\{0, 1, \frac{u(v-1)}{v(u-1)}, \frac{u}{u-1}, \infty\}$, ਤੀਜੀ $\{0, 1, \frac{v-1}{v-u}, \frac{u(v-1)}{v-u}, \infty\}$, ਚੌਥੀ $\{0, 1, \frac{v}{u}, \frac{v-1}{u-1}, \infty\}$ ਅਤੇ ਪੰਜਵੀਂ $\{0, 1, \frac{v}{v-1}, \frac{v}{v-u}, \infty\}$। ਸਿਰਫ਼ ਇਕ ਪੱਤੇ ਨੂੰ ਛੱਡ, ਜਿਸ ਦਿਆਂ ਪੰਜੋ ਸਪੈਸ਼ਲ ਕਵਿੰਟਿਕਸ ਬਰਾਬਰ ਹਨ, $\heartsuit_5$ ਦੇ ਹਰ ਪੱਤੇ ਦਿਆਂ ਇਹ ਇਕੁਏਸ਼ਨਜ਼ ਇਕ ਦੂਜੇ ਤੋਂ ਭਿੱਣ ਹਨ :- ਜੇ ਪਹਲੀ ਤੇ ਦੂਜੀ ਬਰਾਬਰ ਹਨ ਤਾਂ $v = \frac{u}{u-1}$ ਸਦਕੇ $u = \frac{u(v-1)}{v(u-1)} = v - 1 = \frac{u}{u-1} - 1 = \frac{1}{u-1}$ ਯਾਣੀ ਕਿ u ਹੈ ਗੋਲਡੱਨ ਰੇਸ਼ੋ $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ਤੇ $v = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$। ਐਸੀ ਹੀ ਹੋਰ ਮਹਿਣਤ ਕਰਦੇ ਤੁਸੀਂ ਹੁਣ ਚੈਕ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਦੱਰਅਸਲ ਕੋਈ ਦੋ ਇਕੁਏਸ਼ਨਾਂ ਓਦੋਂ ਤੇ ਓਦੋਂ ਹੀ ਬਰਾਬਰ ਹਨ ਜਦੋਂ $(u, v) = (\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2})$। □ ਪਰ ਪਰੂਫ਼ ਖੱਤਮ ਕਰਣ ਦੇ ਨਿਮਣ-ਲਿਖਤ ਤਰੀਕੇ ਵਿਚ ਇਹ ਹੋਰ ਮਹਿਣਤ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰੱਤ ਨਹੀਂ, ਅੱਤੇ ਨਾਲ ਹੀ ਇਹ ਰਾਹ ਖੋਲ ਦਿੰਦਾ ਹੈ ਕਿਸੀ ਵੀ $\heartsuit_n$ ਦੇ ਪੱਤੇਆਂ ਦੀ ਸਪੇਸ ਨੂੰ ਸਮਝੱਣ ਦਾ।

ਓਰਡਰ ਪੰਜ ਦਾ ਸੀਕਲਿਕ ਗਰੂਪ ਐਕਸ਼ਨ ਹੈ $(u, v) \mapsto (\frac{u(v-1)}{v(u-1)}, \frac{u}{u-1})$, ਦੋ ਵਾਰ ਕਰ ਮਿਲਦਾ

ਹੈ $(\frac{v-1}{v-u}, \frac{u(v-1)}{v-u})$, ਤਿੰਣ ਵਾਰ $(\frac{v}{u}, \frac{v-1}{u-1})$, ਚਾਰ ਵਾਰ $(\frac{v}{v-1}, \frac{v}{v-u})$ ਤੇ ਪੰਜਵੀਂ ਵਾਰ ਵਾਪਸ (u, v)। ਸੋ, ਕਿਉਂਕਿ ਪੰਜ ਪਰਾਇਮ ਹੈ, ਯਾਂ ਤਾਂ ਪੰਜੇ 2–ਟਪਲ ਭਿੰਣ ਹਨ ਯਾਂ ਪੰਜੋਂ ਬਰਾਬਰ, ਅਤੇ ਇਹ ਬਰਾਬਰੀ ਓਦੋਂ ਤੇ ਓਦੋਂ ਹੀ ਜਦੋਂ u ਗੋਲਡਨ ਰੇਸ਼ੋ ਹੈ ਤੇ v ਇਹਦੇ ਨਾਲੋਂ ਇਕ ਵੱਡਾ। □

ਮੈਪ $(u_1, \ldots, u_{n-3}) \mapsto (\frac{u_1(u_2-1)}{u_2(u_1-1)}, \ldots, \frac{u_1(u_{n-3}-1)}{u_{n-3}(u_1-1)}, \frac{u_1}{u_1-1})$ ਸੀਕਲਿਕ ਓਰਡਰ n ਗਰੂਪ ਦਾ ਐਕਸ਼ਨ ਹੈ ਇਨਫ਼ੇਨਾਇਟ $(n-3)$–ਸਿਮਪਲੈਕਸ $\{(u_1, \ldots, u_{n-3}) : 1 < u_1 < \cdots < u_{n-3}\}$ ਉੱਤੇ, ਅਤੇ ਇਹਦਾ ਕੌਸ਼ੈਂਟ ਹੈ $\heartsuit_n, n > 4$ ਦੇ ਪੱਤੇਆਂ ਦੀ ਸਪੈਸ :- ਜੇ ਕੋਈ ਸਪੈਸ਼ਲ ਇਕੁਏਸ਼ਨ ਦੇ ਰੂਟ ਹਨ $\{0, 1, u_1, \ldots, u_{n-3}, \infty\}$, ਯਾਂ ਸੀਕਲਕੀ ਇਕ ਥਾਂ ਘੁਮਾ $\{1, u_1, \ldots, u_{n-3}, \infty, 0\}$, ਤਾਂ ਲਗਾ $\mathcal{G}_0$ ਦੀ ਇਕਲੌਤੀ ਟਰਾਂਸਫ਼ੌਰਮੈਸ਼ਨ ਸੱਚ ਦੈਟ $1 \mapsto 0, u_1 \mapsto 1, 0 \mapsto \infty$, i.e., $t \mapsto \frac{t-1}{u_1-1} \cdot \frac{0-u_1}{0-t} = \frac{u_1(t-1)}{t(u_1-1)}$ ਮਿਲਦੀ ਹੈ ਸਪੈਸ਼ਲ ਇਕੁਏਸ਼ਨ $\{0, 1, \frac{u_1(u_2-1)}{u_2(u_1-1)}, \ldots, \frac{u_1(u_{n-3}-1)}{u_{n-3}(u_1-1)}, \frac{u_1}{u_1-1}, \infty\}$। ਇਹੋ ਕਰ n ਵਾਰ, ਬਣਾਂਦੇ ਪੱਤੇ ਦਿਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਸਪੈਸ਼ਲ ਇਕੁਏਸ਼ਨਾਂ, ਅਸੀਂ ਵਾਪਸ ਪਰਤ ਆਂਦੇ ਹਾਂ। □

2–ਸਿਮਪਲੈਕਸ $\{(u, v) : 1 < u < v\}$ ਉੱਤੇ ਇਹ $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$–ਐਕਸ਼ਨ ਬਾਰੇ :- ਵਰਟੈਕਸ $(1, 1)$ ਤੋਂ ਚਲ ਕਰਵ $(u, u^2), 1 < u < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਇਕਲੌਤੇ ਫ਼ਿਕਸਡ ਪੌਐਂਟ $(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2})$ ਤਕ। ਲੱਗਾ ਐਸ ਤੇ ਮੈਪ $(u, v) \mapsto (\frac{u(v-1)}{v(u-1)}, \frac{u}{u-1})$ ਵਾਰ ਵਾਰ ਮਿਲਦੀਆਂ ਹਨ ਕੁਲ ਪੰਜ ਡਿਸਜੌਐਂਟ ਕਰਵਜ਼ ਬਾਉਂਡਰੀ ਤੋਂ ਫ਼ਿਕਸਡ ਪੌਐਂਟ ਤਕ। ਇਹ ਮੈਪ ਨਹੀਂ, ਇਹਦਾ ਕੀਊਬ $(u, v) \mapsto (\frac{v}{u}, \frac{v-1}{u-1})$ ਹੈ ਜੋ ਹਰ ਕਰਵ ਨੂੰ ਕਲੌਕਵਾਇਜ਼ ਅੱਗਲੀ ਨਾਲ ਆਈਡੈਂਟੀਫ਼ਾਈ ਕਰਦਾ ਹੈ, ਮਸਲਨ ਉੱਤਲੀ ਪੈਰਾਬੌਲਿਕ ਕਰਵ ਤੋਂ ਅੱਗਲੀ ਹੈ ਸੈਗਮੈਂਟ $(u, u+1), 1 < u < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$। ਸੋ ਐਕਸ਼ਨ ਦੀ ਓਰਬਿਟ ਸਪੇਸ--$\heartsuit_5$ ਦੇ ਪੱਤੇਆਂ ਦੀ ਸਪੈਸ--ਫ਼ਿਕਸਡ ਓਰਬਿਟ ਉੱਤੇ ਕੌਨ ਹੈ, ਟੋਪੋਲੋਜਿਕਲੀ ਇਕ ਪਲੇਨ। □



ਇਨਵੱਰਸ਼ਨ $x \to \frac{x}{x-1}$ ਨੇ ਹੀ ਜੱਨਮੇ ਹਨ ਇਹ ਸਾਰੇ ਸੀਕਲਿਕ ਐਕਸ਼ਨ, ਇਕ ਤੋਂ ਵੱਧ ਨੰਬਰਾਂ ਦੇ ਸਾਰੇ ਵੱਧਦੇ ਟਪਲਜ਼ ਉੱਤੇ! ਅੱਤੇ ਓਵਰ $\mathbb{Q}$ ਹੈ ਡੈਫ਼ੀਨੈਸ਼ਨ, ਸੋ ਚਿਤਰ ਦੇ ਰੈਸ਼ਨਲ 2–ਟਪਲਜ਼ ਤੇ ਹੈ ਇਹ ਫ਼ਰੀ $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$–ਐਕਸ਼ਨ। ਅੱਤੇ ਜਾਪਦਾ ਹੈ ਹਰ n ਪਰਾਇਮ ਲਈ ਵੀ ਇਹੋ ਸਹੀ ਹੈ? ਪਰ ਪਹਲਾਂ, ਲਿਖਦੇ ਕੁਝ 3–ਟਪਲਜ਼ (u, v, w) ਦੇ $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$–ਓਰਬਿਟ, ਚਲੋ ਚੈਕ ਕਰ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜੇ n ਪਰਾਇਮ ਨਹੀਂ ਤਾਂ ਗੱਭਲੇ ਪੱਤੇ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਹੋਰ ਵੀ ਸਿੰਗੂਲੈਰੀਟੀਜ਼ ਹਨ ਓਰਬਿਟ ਸਪੇਸ ਵਿਚ।

$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$–ਐਕਸ਼ਨ ਬਾਰੇ :- ਹੁਣ ਮੈਪ ਹੈ $(u, v, w) \mapsto (\frac{u(v-1)}{v(u-1)}, \frac{u(w-1)}{w(u-1)}, \frac{u}{u-1})$। ਜੇ $(u, v, w) = (\frac{u(v-1)}{v(u-1)}, \frac{u(w-1)}{w(u-1)}, \frac{u}{u-1})$, ਤਾਂ $v = \frac{u(w-1)}{w(u-1)} = w - 1 = \frac{u}{u-1} - 1 = \frac{1}{u-1}$, ਸੋ $u = \frac{u(v-1)}{v(u-1)} =$

$\frac{u(2-u)}{u-1}$, ਸੋ $u = \frac{3}{2}, v = 2, w = 3$, i.e., ਇਕਲੌਤਾ ਫ਼ਿਕਸਡ 3–ਟਪਲ ਹੈ $(\frac{3}{2}, 2, 3)$, ਨੋਟ ਕੇਸ $n = 5$ ਦੇ ਵਿਪਰੀਤ ਇਹ ਰੈਸ਼ਨਲ ਹੈ। ਹੁਣ ਮੈਪ ਓਰਡਰ ਦੋ ਯਾ ਤਿਣ ਦਾ ਵੀ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਮੈਪ ਦਾ ਸਕਵੇਅਰ ਹੈ $(u, v, w) \mapsto (\frac{(w-u)(v-1)}{(w-1)(v-u)}, \frac{v-1}{v-u}, \frac{u(v-1)}{v-u})$। ਜੇ ਇਹ ਫ਼ਿਕਸਡ ਹੈ ਤਾਂ $w = uv$ ਅੱਤੇ $u = \frac{uv-u}{uv-1}v$, ਸੋ $uv - 1 = (v-1)v$, ਸੋ ਕਰਵ $u = \frac{v^2-v+1}{v}, v > 1, w = v^2 - v + 1$ ਦੇ $(\frac{3}{2}, 2, 3)$ ਨੂੰ ਛੱਡ ਬਾਕੀ ਪੌਐਂਟ ਹਨ ਓਰਡਰ ਦੋ ਦੇ ਸਾਰੇ 3–ਟਪਲ। ਐਸੀ ਹੀ ਮਹਿਣਤ ਦੱਸਦੀ ਹੈ ਕਿ ਓਰਡਰ ਤਿਣ ਦੇ 3–ਟਪਲ ਹਨ $(\frac{3}{2}, 2, 3)$ ਚੋਂ ਸਰਫ਼ੈਸ $u(v-1) = w(u-1)$ ਦੇ ਸ਼ੇਸ਼ ਪੌਐਂਟ। ਚੁੰਜ $(1, 1, 1)$ ਚੋਂ ਸਿਮਪਲੈਕਸ ਦੀ ਕੋਈ ਰੇ ਇਸ ਨੂੰ ਇਕੋ ਹੋਰ ਬਿੰਦੂ ਵਿਚ ਕੱਟਦੀ ਹੈ, ਸੋ ਇਹ ਓਪੈਣ 2–ਸੈਲ ਹੈ 3–ਸਿਮਪਲੈਕਸ ਨੂੰ ਵੰਡਦਾ ਦੋ ਹਿੱਸੇਆਂ ਵਿਚ। ਓਰਡਰ ਦੋ ਕਰਵ ਚੁੰਜ ਤੋਂ ਚੱਲ ਨਿਚਲੇ ਹਿੱਸੇ ਚੋਂ ਜਾਂਦੀ ਸੈਲ ਨੂੰ ਫ਼ਿਕਸਡ ਪੌਐਂਟ ਚ ਕਟਦੀ ਉਤਲੇ ਹਿੱਸਾ ਟਪ (∞, ∞, ∞) ਤੱਕ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

ਇਕ ਉਧਾਰਣ ਓਰਡਰ ਦੋ ਦੇ ਓਰਬਿਟ ਦੀ ਹੈ $(\frac{7}{3}, 3, 7) \mapsto (\frac{7}{6}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}) \mapsto (\frac{7}{3}, 3, 7)$ ਅੱਤੇ ਓਰਡਰ ਤਿਣ ਦੀ $(2, 3, 4) \mapsto (\frac{4}{3}, \frac{3}{2}, 2) \mapsto (\frac{4}{3}, 2, 4) \mapsto (2, 3, 4)$। ਪਰ ਸਭਤੋਂ ਆਮ – ਬਣਾਂਦੇ ਹਨ ਇਹ 3–ਸਿਮਪਲੈਕਸ ਦਾ ਬਾਕੀ ਓਪੈਣ ਸੈਟ – ਹਨ 3–ਟਪਲਜ਼ ਜਿਹਣਾਂ ਦੇ ਓਰਬਿਟਸ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਪੂਰੀ ਛੇ ਹੈ, ਮਸਲਨ $(3, 4, 5) \mapsto (\frac{9}{8}, \frac{6}{5}, \frac{3}{2}) \mapsto (\frac{3}{2}, 3, 9) \mapsto (2, \frac{8}{3}, 3) \mapsto (\frac{5}{4}, \frac{4}{3}, 2) \mapsto (\frac{5}{4}, \frac{5}{2}, 5) \mapsto (3, 4, 5)$, ਵਗੈਰਾ। ਏਣੀਆਂ ਸੂਖੱਮ ਹਨ ਇਹ ਓਰਬਿਟਲ ਕੈਲਕੁਲੈਸ਼ਨਜ਼ ਕਿ ਜਲਦ ਚੱਸਕਾ ਜਿਹਾ ਪੈ ਸਕਦਾ ਹੈ ਇਹਣਾਂ ਦਾ, ਪਰ ਹੁਣ ਰੱਫ਼ ਤਸਵੀਰ ਵੀ ਬਣਾਣੀ ਏਣੀ ਸਰਲ ਨਹੀਂ!

ਐਣੀਵੇ, ਆਮ ਓਰਬਿਟ ਤੇ ਓਲਟਰਨੇਟਲੀ $u(v-1) \leqslant w(u-1)$, ਤਿਣ ਟਪਲ ਨਿਚਲੇ ਹਿੱਸੇ ਚ ਤੇ ਬਾਕੀ ਤਿਣ ਉੱਤਲੇ ਚ; ਜੱਦ ਕਿ ਓਰਡਰ ਤਿਣ ਓਰਬਿਟ ਦੇ ਤਿਣੋਂ ਹਨ ਦਰਮਿਆਣੀ ਸੈਲ ਉੱਤੇ; ਤੇ ਓਰਡਰ ਦੋ ਦੇ ਕਰਵ ਤੇ, ਇਕ ਫ਼ਿਕਸਡ ਪੌਐਂਟ ਥੱਲੇ ਇਕ ਉੱਤੇ। ਓਰਬਿਟ ਸਪੇਸ ਹੈ ਕਲੋਜ਼ਡ ਸੌਲਿਡ ਕੋਨ ਫ਼ਿਕਸਡ ਓਰਬਿਟ ਉੱਤੇ। ਬਾਕੀ ਕੋਨ ਬਾਉਂਡਰੀ ਹੈ ਓਰਡਰ ਤਿਣ ਓਰਬਿਟਸ, ਕੋਸ਼ੈਟ ਓਪੈਣ 2–ਸੈਲ ਦਾ, ਕਰਵ ਗਿਰਦ ਓਰਡਰ ਤਿਣ ਸੀਕਲਿਕ ਐਕਸ਼ਨ ਥੱਲੇ। ਅਤੇ ਕਰਵ ਖੁਦ ਫ਼ਿਕਸਡ ਪੌਐਂਟ ਤੇ ਇਨਵੌਲੁਸ਼ਨ ਥਲੇ ਫ਼ੋਲਡ ਹੋ ਕੋਨ ਅੰਦਰ ਦਿੰਦੀ ਹੇ ਸਾਰੇ ਓਰਡਰ ਦੋ ਓਰਬਿਟਸ ਦੀ ਇਕ ਟੇਢੀ ਐਕਸਿਸ। ਬਾਕੀ ਅੰਦਰੂਣੀ ਪੌਐਂਟਸ ਕੋਨ ਦੇ ਹਨ ਸਾਰੀਆਂ ਪੂਰੀ ਲੰਬਾਈ ਛੇ ਓਰਬਿਟਸ। ਸੋ ਟੋਪੋਲੋਜਿਕਲੀ ਸਵੈਲੋਟੇਲ $\heartsuit_6$ ਦੇ ਪੱਤੇਆਂ ਦੀ ਸਪੇਸ ਹੈ ਇਕ ਤਿਣ ਡਾਈਮੈਨਸ਼ਨਲ ਕਲੋਜ਼ਡ ਹਾਫ਼ ਸਪੇਸ। $\square$

ਹਰ ਸਵੈਲੋਟੇਲ ਦਾ ਹੈ ਇਕ ਤੇ ਸਿਰਫ਼ ਇਕ ਪੱਤਾ ਜਿਹਦੀ ਸਿਰਫ਼ ਇਕ ਸਪੈਸ਼ਲ ਇਕੁਏਸ਼ਨ ਹੈ, ਮਤਲਬ, ਹਰ ਉੱਤਲੇ ਸੀਕਲਿਕ ਐਕਸ਼ਨ ਦਾ ਇਕ ਤੇ ਸਿਰਫ਼ ਇਕ ਫ਼ਿਕਸਡ ਪੌਐਂਟ ਹੈ। ਦਰਅਸਲ, ਇਕ ਤੋਂ ਵੱਧ ਨੰਬਰਾਂ ਦੀ ਕੋਈ ਕੌਨਟੀਨੁਅਸ ਇਨਵੋਲੁਸ਼ਨ $x \mapsto \overline{x}$ (ਸੋਚੋ $\overline{x} := \frac{x}{x-1}$) ਲਈ, ਐਸੇ ਨੰਬਰਾਂ ਦੇ ਵੱਧਦੇ m–ਟਪਲਜ਼ ਤੇ ਮੈਪਸ $(x, u_2, \ldots, u_m) \mapsto (\overline{x} \div \overline{u_2}, \ldots, \overline{x} \div \overline{u_m}, \overline{x})$ ਦੇ ਇਕਲੌਤੇ ਫ਼ਿਕਸਡ ਪੌਐਂਟ ਹਨ:- $x \mapsto \overline{x}$ ਘੱਟਦੀ ਹੋਮੀਓਮੋਰਫ਼ਿਜ਼ਮ ਹੈ $(1, \infty)$ ਦੀ, ਸੋ ਮੈਪਸ ਵੈਲ–ਡੀਫ਼ਾਇਣਡ ਹਨ। ਜੇ $(x, u_2, \ldots, u_m) = (\overline{x} \div \overline{u_2}, \ldots, \overline{x} \div \overline{u_m}, \overline{x})$ ਤਾਂ $u_m = \overline{x}$, $u_{m-1} = \overline{x} \div \overline{u_m} = \overline{x} \div x$, $u_{m-2} = \overline{x} \div \overline{u_{m-1}} = \overline{x} \div \overline{(\overline{x} \div x)}$, $u_{m-3} = \overline{x} \div (\overline{x} \div \overline{(\overline{x} \div x)})$, ਤੇ ਆਖਰ $x = f_m(x)$। ਏਥੇ $f_1(x) = \overline{x}$ ਜਿਹਦਾ $(1, \infty)$ ਉੱਤੇ ਗਰਾਫ਼ ∞ ਤੋਂ 1 ਵਲ ਘੱਟਦਾ ਹੈ, ਸੋ ਲਾਇਣ $y = x$ ਨੂੰ ਇਕੋ ਪੌਐਂਟ (s_1, s_1) ਵਿਚ ਕੱਟਦਾ ਹੈ। ਅੱਤੇ ਇਨਡੱਕਟਿਵਲੀ $f_{i+1}(x) = \overline{x} \div \overline{f_i(x)}$ ਜਿਹਦਾ $(1, s_i)$ ਉੱਤੇ ਗਰਾਫ਼ ∞ ਤੋਂ 1 ਵਲ ਘੱਟਦਾ ਹੈ, ਸੋ ਇਹ ਵੀ ਲਾਇਣ $y = x$ ਨੂੰ ਇਕੋ ਪੌਐਂਟ (s_{i+1}, s_{i+1}) ਵਿਚ ਕੱਟਦਾ ਹੈ। ਸੋ ਹਰ m ਲਈ ਇਕੋ m–ਟਪਲ ਫ਼ਿਕਸਡ ਹੈ। $\square$

ਪਰ, ਹੈਗੇ ਇਨਵੋਲੁਸ਼ਨ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ 2–ਟਪਲਜ਼ ਤੇ ਮੈਪ ਦੇ ਅੱਤ ਲੰਬੇ ਓਰਬਿਟ ਹਨ :- ਕੋਈ $(1, \infty)$ ਦੇ ਗਿਣਤੀ ਦੇ ਸਬਸੈਟ ਦੀ ਘੱਟਦੀ ਓਰਡਰ ਦੋ ਬਾਈਜੈਕਸ਼ਨ ਐਗਸਟੈਂਡ ਕਰਦੀ ਹੈ ਇਕ ਇਨਵੋਲੁਸ਼ਨ। ਅਤੇ ਮਸਲਨ $(2, 3)$ ਦੀ ਓਰਬਿਟ ਅਸੀਂ ਵਧਾਂਦੇ ਹੀ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਨਾਲ ਇਕ ਐਸੀ ਬਾਈਜੈਕਸ਼ਨ ਐਂਵੇਂ ਡੀਫ਼ਾਇਣ ਕਰਦੇ ਕਿ ਹਰ ਨਵੇਂ ਨੰਬਰ ਦੀ ਜੀਨੀਰਿਕ ਵਾਜਿਬ ਕੀਮਤ ਹੈ। ਵਾਜਿਬ ਕੀਮਤਾਂ ਲੱਭਣ ਲਈ ਵੰਡ ਦੋ $(1, \infty)$ ਨੂੰ ਇਸਤਮਾਲ ਕੀਤੇ ਸੱਭ ਗਿਣਤੀ ਦੇ ਨੰਬਰਾਂ ਨਾਲ ਤੇ ਨੋਟ ਕਰੋ ਸਬ–ਇਨਟਰਵਲ ਜਿਸ ਵਿਚ ਨਵਾਂ ਨੰਬਰ ਹੈ, ਤੇ ਜੀਨੀਰਿਕ ਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ ਐਸ ਦੇ ਸੀਰੇਆਂ ਦਿਆਂ ਕੀਮਤਾਂ ਦਰਮੀਆਣ ਅਣਗਿਣੱਤ ਨੰਬਰਾਂ ਚੋਂ ਛੱਡ ਦੋ ਓਹ ਜੋ ਇਸਤਮਾਲ ਨੰਬਰਾਂ ਦਿਆਂ ਫ਼ਰੇਕਸ਼ਨਜ਼ ਹਨ। $\square$

ਇਹ ਦੱਸਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇਨਵੱਰਸ਼ਨ $\overline{x} := \frac{x}{x-1}$, ਜਿਸ ਤੇ ਹੀ ਅੱਸੀ ਕੇਂਦਰਿਤ ਰਹਾਂਗੇ, ਕਿਣੀ ਸਾਊ ਹੈ!

ਆਪਾਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਹਦੇ m-ਟਪਲਜ਼ ਉੱਤੇ ਇਨਡੀਉਸਡ ਮੈਪ ਦਾ ਨਾਂ ਸਿਰਫ਼ ਇਕੋ ਫ਼ਿਕਸਡ ਪੌਐਂਟ ਹੈ, ਕਿਸੀ ਹੋਰ ਓਰਬਿਟ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਹੈ $m+3$ ਦਾ ਕੋਈ ਪੋਜ਼ੀਟਿਵ ਡੀਵਾਈਜ਼ਰ। ਅੱਤੇ ਜਾਪਦਾ ਹੈ ਕਿ ਜੇ $m \geq 2$ ਤਾਂ ਹਰ ਐਸੀ ਲੰਬਾਈ ਦਾ ਹੈ ਜ਼ਰੂਰ ਇਕ ਓਰਬਿਟ?

ਪਰਾਇਮਜ਼ $n > 5$ ਲਈ ਸਵੈਲੋਟੇਲ $\heartsuit_n$ ਦੇ ਪੱਤੇਆਂ ਦੀ ਸਪੇਸ:- ਇਹ ਹੈ ਇਨਫ਼ੇਨਾਇਟ $(n-3)$-ਸਿਮਪਲੈਕਸ $1 < u_1 < \cdots < u_{n-3} < \infty$ ਦੀ $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ਐਕਸ਼ਨ ਥਲੇ ਓਰਬਿਟ ਸਪੇਸ। ਇਕਲੌਤੇ ਫ਼ਿਕਸਡ ਪੌਐਂਟ ਦੇ ਕੌਮਪਲੀਮੈਂਟ ਦੀ ਹੋਮੋਟੋਪੀ ਇਕ $(n-4)$-ਸਫ਼ੀਆਰ ਦੀ ਹੈ, ਸੋ $n > 5$ ਲਈ ਸਿਮਪਲੀ ਕੌਨੈਕਟਿਡ। ਅੱਤੇ ਕਿਉਂਕਿ n ਪਰਾਇਮ ਹੈ ਇਹਦੇ ਹਰ ਪੌਐਂਟ ਦੇ ਓਰਬਿਟ ਦੀ ਲੰਬਾਈ n ਹੈ, i.e., ਐਸ ਤੇ $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ਐਕਸ਼ਨ ਫ਼ਰੀ ਹੈ ਤੇ ਕੋਸ਼ੈਂਟ ਮੈਪ n-ਫ਼ੋਲਡ ਅਣਬਰਾਂਚਡ ਕੱਵਰਿੰਗ ਹੈ। ਸੋ ਓਰਬਿਟ ਸਪੈਸ ਚੋਂ ਫ਼ਿਕਸਡ ਓਰਬਿਟ ਦੇ ਕੌਮਪਲੀਮੈਂਟ ਦਾ ਫ਼ੰਡਾਮੈਂਟਲ ਗਰੂਪ $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ਹੈ, ਸੋ ਐਸ ਇਕੋ ਪੌਐਂਟ ਨੇੜੇ ਓਰਬਿਟ ਸਪੈਸ ਮੈਨੀਫ਼ੋਲਡ ਨਹੀਂ। ਵਿਪਰੀਤ ਕੇਸ $n = 5$ ਦੇ, ਜਦੋਂ ਇਹ ਇਕਲੋਤੀ ਸਿੰਗੂਲੈਰੀਟੀ ਸਿਰਫ਼ ਜੀਓਮੈਟਰਿਕ ਸੀ, ਹੁਣ ਹੈ ਇਹ ਇਕ ਟੋਪੋਲੋਜੀਕਲ ਸਿੰਗੂਲੈਰੀਟੀ।

ਇਨਫ਼ੇਨਾਇਟ ਸਿਮਪਲੈਕਸ ਤੇ $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-ਇਨਵੇਰੀਐਂਟ ਰੀਮਾਇਿਅਨ ਮੀਟਰਿਕ ਪਰਾਪੱਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਕਿਸੀ ਰੀਮਾਇਿਅਣ ਮੀਟਰਿਕ ਨੂੰ ਐਸ ਫ਼ਾਏਨਾਇਟ ਗਰੂਪ ਐਕਸ਼ਨ ਥੱਲੇ ਐਵਰੇਜ ਕਰ। ਫ਼ੰਕਸਨ ਜੋ ਦਿੰਦੀ ਹੈ ਫ਼ਿਕਸਡ ਪੌਐਂਟ ਤੋਂ ਇਹ ਦੂਰੀ ਦੇ ਟੇਢੇ ਮੇਢੇ ਲੈਵਲ ਸਰਫ਼ੈਸ ਟੋਪੋਲੋਜੀਕਲੀ ਸਫ਼ੀਅਰ S^{n-4} ਹਨ, ਤੇ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਨੌਰਮੱਲੀ ਕੱਟਦੀਆਂ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨ ਦਿਆਂ ਗਰੇਡੀਐਂਟ ਕਰਵਜ਼ ਫ਼ਿਕਸਡ ਪੌਐਂਟ ਚੋਂ ਨਿਕੱਲਦੀਆਂ ਰੇਜ਼। ਕਿਸੀ ਲੈਵਲ ਸਰਫ਼ੈਸ ਦਾ ਐਕਸ਼ਨ ਥੱਲੇ ਕੋਸ਼ੈਂਟ ਇਕ ਕਲੋਜ਼ਡ ਮੈਨੀਫ਼ੋਲਡ M^{n-4} ਵਿਦ ਫ਼ੰਡਾਮੈਂਟਲ ਗਰੂਪ $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ਹੈ ਤੇ ਪੱਤੇਆ ਦੀ ਸਪੇਸ ਹੈ M^{n-4} ਉੱਤੇ ਕੋਨ। □

ਕਿ, ਜੇ ਓਡ ਸਫ਼ੀਅਰ S^{n-4} ਉੱਤੇ ਹੋਪਫ਼ ਦੇ ਸਰਕਲ ਗਰੂਪ ਐਕਸ਼ਨ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਓਰਡਰ n ਸੀਕਲਿਕ ਸਬਗਰੂਪ ਤਕ ਸੀਮਿਤ ਕਰ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ, ਤੇ ਇਹੋ ਕੋਸ਼ੈਂਟ M^{n-4} ਮਿਲਦਾ ਹੈ?

ਸ਼ੇਸ਼ ਹੈ, ਕਿ ਪਰਾਇਮਜ਼ $n > 5$ ਲਈ ਵੀ ਫ਼ਿਕਸਡ ਪੌਐਂਟ ਇਰਰੈਸ਼ਨਲ ਹੈ ? $n = 7$ ਲਈ ਹਾਂ :- $f_1(x) = \frac{x}{x-1},\ f_2(x) = \frac{1}{x-1},\ f_3(x) = \frac{x(2-x)}{x-1},\ f_4(x) = \frac{x(-x^2+x+1)}{(x-1)(2x-x^2)}$ ਅੱਤੇ $s_1 = 2, s_2 = \phi, s_3 = \frac{3}{2}$, ਸੋ s_4 ਹੈ 1 ਤੇ $\frac{3}{2}$ ਗੱਭੇ $x = f_4(x)$ ਦਾ ਰੂਟ ਯਾਣੀ ਕਿ $x^3-4x^2+3x+1=0$ ਦਾ ਰੂਟ। ਇਹ ਕੀਉਬਿਕ ਪੌਲੀਨੋਮੀਅਲ 1 ਤੇ ਪੋਜ਼ੀਟਿਵ ਤੇ $\frac{3}{2}$ ਤੇ ਨੈਗੇਟਿਵ ਹੈ, ਸੋ ਵਾਕੇਆਈ ਇਕੋ s_4 ਹੈ ਐਸਾ। ਦੂਜੇ, ਐਸ ਪੌਲੀਨੋਮੀਅਲ ਦਾ $\mathbb{Q}$ ਵਿਚ ਰੂਟ ਨਹੀਂ, ਕਿਉਂਕਿ ਤਾਂ--ਗਾਉਸ ਦਾ ਲੈਮਾ--ਓਹ $\mathbb{Z}$ ਵਿਚ ਹੋਏਗਾ, ਜੋ ਆਸਾਣੀ ਨਾਲ ਚੈਕ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਸਹੀ ਨਹੀਂ। ਸੋ s_4, ਪਹਲਾ ਕੋਓਰਡੀਨੇਟ 4-ਟਪਲ ਦਾ ਜੋ $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ ਐਕਸ਼ਨ ਥੱਲੇ ਫ਼ਿਕਸਡ ਹੈ, ਇਰਰੇਸ਼ਨਲ ਹੈ। □

ਕੁਝ ਚਿਰ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਰੀਅਲਜ਼ ਨਾਲ ਪੱਕੇ ਕਰ ਰਹੇ ਹਾਂ ਨਤੀਜੇ ਜੋ ਪਾਏ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਸਨ ਅਕਸਟੈਂਡਿਡ ਪਲੇਨ ਵਿਚ $\widehat{L}$ ਨੂੰ ਯੁਨਿਟ ਸਰਕਲ S^1 ਬਣਾਕੇ। ਇਕ ਗੋਲ ਸ਼ੀਸ਼ੇ ਚ ਰੈਫ਼ਲੈਕਸ਼ਣ ਜ਼ਰੀਏ, ਸੋ ਡੀ ਫ਼ੈਕਟੋ ਕੌਮਪਲੈਕਸ ਅਲਜਬਰੇ ਸਹਾਰੇ। ਹੁਣ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਖੁਲੇਆਮ ਤੇ ਨਿਰਸੰਕੋਚ ਵਰਤਾਂਗੇ ਕੌਮਪਲੈਕਸ ਨੰਬਰ, ਕਿਉਂਕਿ ਅੱਛਾ ਨਹੀਂ ਆਪਣੇ ਆਪ ਨੂੰ ਅੱਲਗ ਰੱਖੀ ਰੱਖਣਾ ਓਸ ਸਾਫ਼ ਦੋ-ਡੀਮੈਨਸ਼ਨੀ ਇਨਟੀਉਸ਼ਨ ਤੋਂ ਜਿਸ ਨੇ ਦਿਖਾਏ ਸੀ ਇਹ ਇਕ-ਡੀਮੈਨਸ਼ਨੀ ਨਤੀਜੇ। ਮਸਲਨ, ਇਕੋ ਸਪੇਸ਼ਲ ਇਕੁਏਸ਼ਨ ਵਾਲਾ $\heartsuit_n$ ਦਾ ਪੱਤਾ ਓਹੀ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿਚ ਹੈ ਇਕੁਏਸ਼ਨ ਜਿਸ ਦੇ ਰੂਟ, ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ ਓਹਨਾਂ ਨੂੰ ਯੁਣਿਟ ਸਰਕਲ ਤੇ ਤੱਕਦੇ ਹਾਂ, ਹੈਗੇ 1 ਦੇ ਸਾਰੇ nਥ ਰੂਟ। ਵਰੱਤਦੇ ਇਹ, ਫ਼ੱਟ ਹਲ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਉੱਤਲਾ ਕਠਿਣ ਸਵਾਲ!

ਦਰਅਸਲ, ਕੋਈ ਵੀ $n \geq 7$ ਲਈ ਫ਼ਿਕਸਡ ਪੌਐਂਟ ਇਰਰੈਸ਼ਨਲ ਹੈ :- ਜੇ $\omega = e^{2\pi i/n}$ ਤਾਂ 1 ਦੇ nਥ ਰੂਟ ਹਨ $\{1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}\}$ ਤੇ ਅਸੀਂ ਇਹਣਾਂ ਤੋਂ $\heartsuit_n$ ਦੀ ਇਕਲੌਤੀ ਗੱਭਲੀ ਸਪੈਸ਼ਲ ਇਕੁਏਸ਼ਨ ਦੇ ਬਾਕੀ $n-3$ ਰੂਟ $1 < u_i < \infty$ ਕੈਲਕੁਲੇਟ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਲਗਾ ਕੌਮਪਲੈਕਸ ਮੌਬੀਅਸ ਟਰਾਂਸਫ਼ੌਰਮੈਸ਼ਨ ਸੱਚ ਦੈਟ $\omega \mapsto \infty, \omega^2 \mapsto 0, \omega^3 \mapsto 1$, ਯਾਣੀ ਕਿ, $z \mapsto \frac{z-\omega^2}{\omega^3-\omega^2} \cdot \frac{\omega-\omega^3}{\omega-z}$। ਮਸਲਨ 1 ਦਾ ਇਮੇਜ ਹੈ $u_{n-3} = \frac{1-\omega^2}{\omega^3-\omega^2} \cdot \frac{\omega-\omega^3}{\omega-1} = \frac{(1-\omega^2)^2}{\omega(\omega-1)^2} = \frac{(1+\omega)^2}{\omega} = \frac{1}{\omega}+2+\omega = 2(1+\cos 2\pi/n)$। ਕਿਉਂਕਿ $1/\omega = \omega^{n-1}$ ਤੇ ω ਦੋਨੋਂ ਸੈਟਿਸਫ਼ਾਈ ਕਰਦੇ ਹਨ $z^n - 1$, ਇਕ ਮੌਨਿਕ ਇਨਟੀਗਰਲ ਪੌਲੀਨੋਮੀਅਲ, u_{n-3} ਵੀ ਸੈਟਿਸਫ਼ਾਈ ਕਰਦਾ ਹੈ ਐਸਾ ਕੋਈ ਪੌਲੀਨੋਮੀਅਲ। ਸੋ - ਗਾਉਸ ਲੈਮਾ - ਜੇ ਇਹ $\mathbb{Q}$ ਵਿਚ ਹੈ ਤਾਂ $\mathbb{Z}$ ਵਿਚ, ਪਰ $n \geq 7$ ਲਈ $2(1+\cos 2\pi/n)$ ਇਨਟਰਵਲ $(3, 4)$ ਵਿਚ ਹੈ। □ ਸੋ ਪਰਾਇਮਜ਼ $n \geq 5$ ਲਈ $(n-3)$-ਸਿਮਪਲੈਕਸ ਦੇ $\mathbb{Q}$ ਪੌਐਂਟਸ ਉੱਤੇ $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ਐਕਸ਼ਨ ਫ਼ਰੀ ਹੈ।

੫੮. ਪਰ ਅੱਸੀਂ ਪੂਰੀ ਲਾਇਣ $\mathbb{R}$ ਤੇ ਫ਼ੋਕੱਸ ਰੱਖਦੇ ਪਲੇਨ $\mathbb{C}$ ਚੋਂ ਵੀ ਸ਼ੌਰਟ ਕਟਸ ਮਾਰਾਂਗੇ। ਨਾਂ ਭੁਲਦੇ ਹੋਏ ਕੀ ਮੂਲ ਤਾਂ ਹਨ ਐਕਸਟੈਂਡਿਡ ਲਾਇਣ ਪਲੇਨ ਸਪੇਸ ਵਗੈਰਾ ਦੇ ਮੋਬੀਅਸ ਮੈਨੀਫ਼ੋਲਡਜ਼ : ਸਾਰੇ ਨੰਬਰ ਤੇ ਓਹਣਾ ਦੀ ਜਮਾਂ ਮਨਫ਼ੀ ਜ਼ਰਬ ਤਕਸੀਮ, ਕੈਲਕੁਲਸ ਵੀ, ਸੱਭ ਹਨ ਸਿਰਫ਼ ਸਾਧਣ ਜਿਹਣਾਂ ਨਾਲ ਲੋਕਲ ਓਬਜ਼ਰਵਰ ਆਪਣੇ ਫ਼ਰੇਮਜ਼ ਓਫ਼ ਰੈਫ਼ਰੈਂਸ ਵਿਚ ਫ਼ੱਸੇ ਗਲੋਬਲ ਸੱਚਾਈ ਟੋਹ ਰਹੇ ਹਨ! ਬਹੁਕੀਮਤੀ ਹਨ ਇਹ ਰੈਲੇਟਿਵਿਸਟਿਕ ਦਰਿਸ਼ਟੀਕੋਣ ਤੋਂ ਵਿਚਾਰ ਤੇ ਨਤੀਜੇ ਜੋ ਲੋਕਲ ਨੂੰ ਚੇਪ ਗਲੋਬਲ ਬਣਾਂਦੇ ਹਣ। ਜਿੰਵੇ ਮੈਂ ਪਹਿਲਾਂ ਸਮਝਾ ਚੁੱਕਾਂ ਹਾਂ, ਇਣਡੈਫ਼ੀਨਿਟ ਇਨਟੀਗਰੇਸ਼ਣ, ਬਦੌਲੱਤ ਚੈਂਜ ਓਫ਼ ਵੈਰੀਏਬਲਜ਼ ਫ਼ੌਰਮੂਲਾ, ਬਿਲਕੁਲ ਐਸਾ ਬਹੁਕੀਮਤੀ ਵਿਚਾਰ ਹੈ।

ਆਪਣਾ ਟੀਚਾ ਹੈ $\heartsuit_n$ ਦੀ ਕੋਈ ਵੀ ਦਿਤੀ ਇਕੁਏਸ਼ਨ $f(x)=0$ ਹਲ ਕਰਣਾ। ਕਿਹੜੇ ਮੈਨੀਫ਼ੋਲਡਜ਼ ਜੁੜੇ ਹਨ ਇਹਦੇ n ਯਾਂ $n-1$ ਅਗਿਆਤ ਰੂਟਾਂ ਨਾਲ ? ਝੱਟ $\mathbb{R}$ ਮਨਫ਼ੀ ਰੂਟਾਂ ਦਾ ਖਿਆਲ ਆਂਦਾ ਹੈ ਪਰ ਇਹ ਕੋਨੈਕਟਿਡ ਨਹੀਂ, ਸੋ ਚਲਦੇ ਹਾਂ $\mathbb{C}$ ਮਨਫ਼ੀ ਰੂਟਾਂ ਉੱਤੇ ਇਨਟੀਗਰਲ $\int\frac{dz}{f(z)}$ ਤੋਂ। ਕਮਾਲ ਦੀ ਗਲ੍ਹ ਹੈ ਇਹ ਸਰਲ ਇਨਟੀਗਰਲ ਬਹਾਣੇ ਹੀ ਮੇਰੀਆਂ ਝੱਟ ਤੇ ਬੜੇ ਹੀ ਕੁਦਰਤੀ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਤਾਜੀਆਂ ਹੋ ਗਈਆਂ ਯਾਦਾਂ ਇਕ ਤੋਂ ਬਾਦ ਇਕ ਕਈ ਮਸ਼ਹੂਰ ਚੀਜ਼ਾਂ ਦਿਆਂ :-

ਬਦੌਲੱਤ ਚੈਂਜ ਓਫ਼ ਵੈਰੀਏਬਲਜ਼, ਮੈਨੀਫ਼ੋਲਡ ਓੱਤੇ ਇਕ i-ਫ਼ੋਲਡ ਇਣਡੈਫ਼ੀਨਿਟ ਇਨਟੀਗਰੇਲ ਇਕ ਡੀਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ i-ਫ਼ੋਰਮ ਦੇ ਸੱਮਾਣ ਹੈ। ਜੇ ਇਹ ਫ਼ੋਰਮ ਕਲੋਜ਼ਡ ਹੈ, ਤੇ ਓਦੋਂ ਹੀ, ਇਨਟੀਗਰਲ ਦੀ ਕੀਸੀ ਵੀ ਟਰੀਵੀਅਲ i-ਸਾਈਕਲ ਉੱਤੇ ਕੀਮਤ ਜ਼ੀਰੋ ਹੈ। ਸੋ ਸਾਰੇ i-ਸਾਈਕਲਜ਼ ਉੱਤੇ ਕੀਮਤਾਂ ਦੇ ਫ਼ਰੀ ਐਬੀਲੀਅਣ ਪੀਰੀਅਡ ਗਰੁਪ ਦਾ ਰੈਂਕ ਹੈ ਹਦ ਮੈਨੀਫ਼ੋਲਡ ਦਾ ਬੈਟੀ ਨੰਬਰ β_i। ਅੱਤੇ "ਜੀਨੀਰਿਕਲੀ" ਇਹ ਰੈਂਕ β_i ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਮਸਲਨ,

ਪਲੇਨ ਮਨਫ਼ੀ ਰੂਟਾਂ ਉੱਤੇ 1-ਫ਼ੌਰਮ $\frac{dz}{f(z)}$ ਕਲੋਜ਼ਡ ਤਾਂ ਹੈ :- ਜੇ $\frac{1}{f(z)}=P(x,y)+iQ(x,y)$ ਤਾਂ $\omega=(P+iQ)(dx+idy)=(Pdx-Qdy)+i(Qdx+Pdy)$ ਦਾ ਐਕਸਟੀਰੀਅਰ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ $d\omega=(-\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x})dx\wedge dy+i(-\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial x})dx\wedge dy=0$ ਸਦਕੇ ਐਸ ਹੋਲੋਮੋਰਫ਼ਿਕ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨ $\frac{1}{f(z)}$ ਦਿਆਂ ਕੋਸ਼ੀ-ਰੀਮਾਣ ਇਕੁਏਸ਼ਨਜ਼ $\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y},\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{\partial Q}{\partial x}$। $\square$

ਤੇ ਟਰੀਵੀਅਲ 1-ਸਾਈਕਲਜ਼ ਉਤੇ ਹੋਲੋਮੋਰਫ਼ਿਕ ਸੋ ਕਲੋਜ਼ਡ 1-ਫ਼ੌਰਮ ਦੀ ਕੀਮਤ ਦਾ ਜ਼ੀਰੋ ਹੋਣਾ ਸੀ ਕੋਸ਼ੀ ਥੀਓਰਮ। ਸੋ $\int\frac{dz}{f(z)}$ ਦੇ ਪੀਰੀਅਡ ਗਰੁਪ ਦਾ ਰੈਂਕ ਹੈ ਹਦ $\beta_1=\deg(f)$। ਅੱਗੇ, ਕੋਸ਼ੀ ਫ਼ੋਰਮੂਲਾ $\oint\frac{dz}{z-a}=2\pi in, n\in\mathbb{Z}$, ਦਿੰਦਾ ਹੈ ਪੀਰੀਅਡ ਗਰੁਪ $\deg(f)=1$ ਲਈ।

ਪਰ $\deg(f)\geq 2$ ਲਈ $\int\frac{dz}{f(z)}$ ਦੇ ਪੀਰੀਅਡ ਗਰੁਪ ਦਾ ਰੈਂਕ β_1 ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ :- ਵਿਚਾਰੋ $\oint\frac{dz}{f(z)}$ ਇਕ ਓਰੀਜਨ ਦੇ ਗਿਰਦ ਐਣੀ ਵੱਡੀ ਰੈਡੀਅਸ R ਦੇ ਚੱਕਰ ਉੱਤੇ ਕਿ $f(z)$ ਦੈ ਸਾਰੇ ਰੂਟ ਓਹਦੇ ਅੰਦਰ ਹਨ। ਕੋਸ਼ੀ ਥੀਓਰਮ ਦੱਸਦੀ ਹੈ ਕਿ ਐਸ ਦੀ ਕੀਮਤ ਨਹੀਂ ਬਦਲਦੀ $R\to\infty$ ਥੱਲੇ। ਪਰ ਚੱਕਰ ਦਾ ਘੇਰਾ ਹੈ $2\pi R$ ਤੇ ਇਨਟੀਗਰੈਂਡ ਦੀ ਐਬਸੋਲੂਟ ਵੈਲੀਊ ਦਾ ਓਰਡਰ ਹੈ ਹਦ $1/R^2$। ਸੋ ਇਹ ਡੈਫ਼ੀਨਿਟ ਇਨਟੀਗਰਲ ਦੀ ਕੀਮਤ ਹੈ ਜ਼ੀਰੋ। $\square$ ਉਂਜ ਇਹੋ ਤਰਕ ਦਿੰਦੀ ਹੈ ਬੀਜ ਗਣਿਤ ਦਾ ਮੂਲ ਤੱਥ ਕਿ $f(z)=0$ ਦਾ ਕੋਈ ਰੂਟ ਹੈ :- ਜੇ ਨਹੀਂ ਤਾਂ $u(z)=\int_0^z\frac{dz}{f(z)}$ ਹੈ $\mathbb{C}$ ਦੀ ਇਕ ਨੌਨ-ਕੌਨਸਟੈਂਟ ਹੋਲੋਮੋਰਫ਼ਿਕ ਬਾਉਂਡਿਡ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨ ਜੋ ਲੀਓਵੀਲ ਦੀ ਥੀਓਰਮ ਕਾਰਣ ਸੰਭਵ ਨਹੀਂ। $\square$ ਅੱਗੇ,

ਪੂਰਾ ਪੀਰੀਅਡ ਗਰੁਪ ਹੈ $\oint\frac{dz}{f(z)}=2\pi i\sum_j n_jA_j$ ਜਿੱਥੇ $n_j\in\mathbb{Z}$ ਤੇ A_j ਹਨ ਰੈਜ਼ੀਡੀਊ $f(z)$ ਦੇ ਅਗਿਆਤ ਰੂਟਾਂ a_j ਉੱਤੇ, i.e., $\frac{1}{f(z)}=\sum_j\frac{A_j}{z-a_j}$, ਸੋ $A_j=\prod_{k\neq j}\frac{1}{a_j-a_k}$। ਜ਼ਾਹਿਰ ਹੈ ਇਹਦਾ ਰੈਂਕ ≥ 1 ਹੈ, ਤੇ $\sum_j A_j=0$ i.e. ਆਈਡੈਂਟੀਟੀ $\sum_j(\prod_{k\neq j}\frac{1}{a_j-a_k})=0$ ਕਾਰਣ, ਜੋ ਅਸੀਂ ਹੁਣੇ ਹੁਣੇ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਨਾਲ (!) ਸਿਧ ਕੀਤੀ ਹੈ, ਹਮੇਸ਼ਾਂ $\leq\beta_1-1$ ਹੈ। ਦਰਅਸਲ,

ਕੇਸ $\deg(f)=1$ ਲਈ ਹੀ $\frac{dz}{f(z)}$ ਸਿੰਗੂਲੈਰ ਹੈ $z=\infty$ ਤੇ:- ਇਹ ਕੇਸ ਛੱਡ 1-ਫ਼ੋਰਮ $\phi(w)dw$ ਜੋ ਮਿਲਦਾ ਹੈ $z=\frac{1}{w}$ ਤੇ $dz=-\frac{dw}{w^2}$ ਪੁਟ ਟਰਣ ਬਾਦ ਦਾ ਆਮ ਪੌਐਂਟ ਹੈ $w=0$। $\square$ ਸੋ $\deg(f)\geq 2$ ਲਈ ਇਹ 1-ਫ਼ੌਰਮ ਸਾਨੂੰ ਸੱਚੀਂ $\hat{\mathbb{C}}$ ਮਨਫ਼ੀ ਰੂਟਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ, ਅਤੇ ਇਸ ਕੋਮਪਲੈਕਸ ਮੈਨੀਫ਼ੋਲਡ ਦਾ ਪਹਿਲਾ ਬੈਟੀ ਨੰਬਰ β_1 ਤੋਂ ਇਕ ਘੱਟ ਹੈ।

ਪਲਟਦੇ $\mathbb{C}$ ਮਨਫ਼ੀ ਰੂਟਾਂ a_j ਨੂੰ, ਜੇ ਅਸੀਂ ਸਿਰਫ਼ ਨੂਮਰੇਟਰਜ਼ A_j ਨੂੰ ਮਾਸ਼ਾ ਹਲਾ ਕੇ ਬਣਾ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ

$\mathbb{Q}$ ਉੱਤੇ ਇਨਡੀਪੈਨਡੈਂਟ, ਤਾਂ ਮਿਲ ਜਾਂਦਾ ਹੈ $\frac{dz}{f(z)}$ ਦੇ ਅੱਤ ਨਜ਼ਦੀਕ ਇਕ ਹੋਲੋਮੋਰਫ਼ਿਕ 1-ਫ਼ੋਰਮ ਜਿਸ ਦੇ ਪੀਰੀਅਡ ਗਰੁਪ ਦਾ ਰੈਂਕ ਠੀਕ β_1 ਹੈ। ਸੋ ਇਹ ਕੌਮਪਲੈਕਸ ਮੈਨੀਫ਼ੋਲਡ ਦੇ ਬੈਟੀ ਨੰਬਰ $\beta_0 = 1$ ਤੇ β_1 ਅਸੀਂ ਕੇਲਕੁਲੇਟ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਡੀਰਾਮ ਕੌਮਪਲੈਕਸ $\Lambda^* \xrightarrow{d} \Lambda^{*+1}$ ਦੀ ਜਗਹਾ ਸਾਰੇ ਹੋਲੋਮੋਰਫ਼ਿਕ ਫ਼ੋਰਮਜ਼ ਦੇ ਬੇਸਿਕ ਸਬਕੌਮਪਲੈਕਸ $E_1^{*,0} \xrightarrow{d} E_1^{*+1,0}$ ਤੋਂ ਹੀ। ਦੁਜੇ ਹਥ,

ਅੱਤ ਨੋਨਡੀਜੈਨੇਰੇਟ ਹੋ ਸਕਦੈ ਇਹ ਸਪੈਟਰਲ ਸੀਕਵੈਂਸ $E_k^{p,q}$ ਕੌਮਪਲੈਕਸ ਮੈਨੀਫ਼ੋਲਡ ਦਾ (ਯਾਂ ਫ਼ੇਰ ਫ਼ੋਲੀਏਟਿਡ ਮੈਨੀਫ਼ੋਲਡ ਦਾ)। ਪਰ, ਸਾਰੇ n-ਡਾਈਮੈਨਸ਼ਨਲ ਮੈਨੀਫ਼ੋਲਡਜ਼, ਤੇ ਕਾਫ਼ੀ ਹੌਰ ਸਿਮਪਲੀਸ਼ੀਅਲ ਕੌਮਪਲੈਕਸ K^n ਵੀ, ਐਮਬੈਡਿਡ ਪਾਏ ਜਾਂਦੇ ਹਨ $2n$-ਸਪੈਸ $\mathbb{C}^n$ ਵਿਚ। ਸਵਾਲ : ਕਿ ਐਸੇ ਕਿਸੀ ਦੇ ਬੈਟੀ ਨੰਬਰ $\beta_i(K^n)$ ਅਸੀਂ ਕੈਲਕੁਲੇਟ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ $\mathbb{C}^n$ ਦੇ ਗਵਾਂਡੀ ਹੋਲੋਮੋਰਫ਼ਿਕ ਫ਼ੋਰਮਜ਼ ਤੋਂ? ਅੱਗੇ, ਕਿ ਐਸੇ ਕਿਸੀ ਦੀ ਹੇਵੁਡ ਇਨਇਕੁਐਲੀਟੀ $\alpha_n(K^n) < (n+2) \cdot \alpha_{n-1}(K^n)$ ਅਸੀਂ ਇਸ ਲਿੰਕਡ ਪਰਚੇ ਦੀਆਂ ਦਲੀਲਾਂ ਨੂੰ ਕੌਮਪਲੈਕਸੀਫ਼ਾਈ ਕਰਕੇ ਹੀ ਸਿਧ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ? ਪਰ ਜ਼ਰੂਰ, ਕੀਸੀ ਵੀ $K^m \subset \mathbb{C}^n$ ਦੇ ਬੈਟੀ ਨੰਬਰ ਅਸੀਂ ਕੈਲਕੁਲੇਟ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਗਵਾਂਡੀ ਸਮੂਦ ਫ਼ੋਰਮਜ਼ ਤੋਂ:- ਕਿਉਂਕਿ ਹਨ ਓਹਦੇ ਅੱਤ ਨਿੱਕੇ ਨੈਬਰਹੁਡ U ਜਿਹਨਾਂ ਦਾ ਹੋਮੋਟੋਪੀ ਟਾਇਪ ਓਹੀ ਹੈ। □

ਇਸ ਸੰਧਰਭ ਵਿਚ ਯਾਦ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\mathbb{C}^n$, ਅਤੇ $\mathbb{C}$ ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੇ $\mathbb{C}^n, n > 1$, ਦੇ ਕੁਝ ਓਪੈਣ ਸੈਟ ਸ਼ਟਾਇਣ ਮੈਨੀਫ਼ੋਲਡਜ਼ ਹਨ, ਤੇ ਇਹ ਓਪੈਣ ਕੌਮਪਲੈਕਸ ਮੈਨੀਫ਼ੋਲਡਜ਼ ਲਈ ਤਾਂ ਇਹ ਵੀ ਸੱਚ ਹੈ ਕਿ ਦੋਲਬੋ ਕੋਹੋਮੋਲੋਜੀ $E_1^{p,q}$ ਜ਼ੀਰੋ ਹੈ ਜੇ $q > 0$, ਸੋ ਸਿਰਫ਼ ਹੋਲੋਮੋਰਫ਼ਿਕ ਫ਼ੋਰਮਜ਼ $E_1^{*,0}$ ਹੀ ਬੱਚਦੇ ਹਨ। ਪਰ ਹਨ $\mathbb{C}^n, n > 1$, ਦੇ ਓਪਣ ਸੈਟ ਜੋ ਸ਼ਟਾਇਣ ਨਹੀਂ:- ਮਸਲਨ $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ ਦੇ ਟੂਬੁਲਰ ਨੈਬਰਹੁਡ U ਦਾ ਬੈਟੀ ਨਮਬਰ $\beta_3(U) = 1$ ਪਰ ਨਹੀ U ਦਾ ਕੋਈ ਹੋਲੋਮੋਰਫ਼ਿਕ 3-ਫ਼ੌਰਮ। □

ਉੱਤਲੀ ਦੋਲਬੋ ਵੈਨੇਸ਼ਿੰਗ, ਜੋ $\mathbb{C}^n$ ਲਈ ਵਜਦੀ ਹੈ ਗਰੋਥੈਨਡੀਕ ਲੈਮਾ, ਸਾਡੇ ਸਰਲ ਮੈਨੀਫ਼ੋਲਡ $\mathbb{C}$ ਮਨਫ਼ੀ ਪੌਐਂਟਸ a_j ਲਈ ਵੀ ਐਣੀ ਸਰਲ ਨਹੀਂ। ਅਸੀਂ ਇਹ ਤਾਂ ਹੁਣ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ E_2 ਟਰਮ ਫ਼ਾਈਨਲ ਹੈ ਵਿਦ $E_2^{0,1} = E_2^{1,1} = 0$, ਸੋ $d_1 : E_1^{0,1} \cong E_1^{1,1}$, ਪਰ ਕਿਉਂ ਹਨ ਇਹ ਜ਼ੀਰੋ:-

ਕਿਉਂਕਿ ਕੋਸ਼ੀ-ਰੀਮਾਨ ਪੀਡੀਈ $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = f$ (ਵਰਤੀ ਨੋਟੇਸ਼ਨ ਬਾਰੇ ਦੇਖੋ ਥੱਲੇ) ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਪਲੇਨ $\mathbb{C}$ ਦੇ ਹਰ ਓਪੈਣ ਸੈਟ U ਤੇ ਹਲ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, i.e., $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} : C^\infty(U) \to C^\infty(U)$ ਸਰਜੈਕਟਿਵ ਹੈ ਵਿਦ ਕਰਨਲ ਸਾਰੀਆਂ ਹੋਲੋਮੋਰਫ਼ਿਕ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨਜ਼।

ਜੇ $f(z)$ ਕੌਮਪੈਕਟਲੀ ਸਪੋਰਟਿਡ ਹੈ ਤਾਂ ਕੌਨਵੋਲੁਸ਼ਨ $g(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int\int \frac{f(z)}{z-\zeta} dz \wedge d\bar{z}$ ਸਮੂਦ ਹੈ U ਉੱਤੇ ਤੇ $\frac{\partial g}{\partial \bar{\zeta}} = f(\zeta)$। ਪਰੂਫ਼ ਇਹਦਾ ਇਸਤਮਾਲ ਕਰਦਾ ਹੈ ਸਟੋਕਸ ਫ਼ੋਰਮੁਲਾ, ਜੋ ਖੁਦ ਸਿਧ ਕਰਣ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਸਤਮਾਲ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕੈਲਕੁਲਸ ਦੀ ਮੂਲ ਥੀਓਰਮ, i.e., ਲਾਇਣ $\mathbb{R}$ ਦੇ ਹਰ ਓਪੈਣ ਸੈਟ ਤੇ $\frac{d}{dx} : C^\infty \to C^\infty$ ਸਰਜੈਕਟਿਵ ਹੈ ਵਿਦ ਕਰਨਲ ਲੋਕੱਲੀ ਕੌਨਸਟੈਂਟ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨਜ਼।

ਕੋਈ $f \in C^\infty(U)$ ਤੇ ਕੌਮਪੈਕਟ ਸੈਟ $K_i \subset U$ ਪਿਛੇ, ਹੈ ਕੌਮਪੈਕਟਲੀ ਸਪੋਰਟਿਡ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨ f_i ਜੋ K_i ਉਤੇ f ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ, ਪਰ ਉਤਲੇ g_i ਸੱਚ ਦੈਟ $\frac{\partial g_i}{\partial \bar{z}} = f_i$ ਅਕਸਰ ਇਹਨਾਂ ਸੈਟਾਂ ਦੇ ਲੀਮਿਟ U ਉਤੇ ਪੀਡੀਈ $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = f$ ਨੂੰ ਹਲ ਕਰਦੀ ਇਕ ਡਿਸਟਰੀਬੁਸ਼ਨ $g \in \mathcal{D}(U)$ ਹੀ ਦਿੰਦੇ ਹਨ।

ਪਰ ਸਮੂਦ ਹਲ ਵੀ ਹਨ - ਮੀਟਾਗ-ਲੈਫ਼ਲਰ ਥੀਓਰਮ - ਜੋ ਹਨ ਲੀਮਿਟ ਪੌਐਂਟਸ ਟੀਵੀਐਸ $C^\infty(U)$ ਦੇ ਸਬਸੈਟ {ਸਾਰੀਆਂ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨਜ਼ g_i ਜਮਾਂ ਹੋਲੋਮੋਰਫ਼ਿਕ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨਜ਼} ਦੇ। ਹੋਰ ਡੀਟੇਲਜ਼ ਲਈ ਵੇਖੋ ਹੋਰਮਾਂਡਰ ਦੀ ਕੌਮਪਲੈਕਸ ਐਨੇਲੇਸਿਸ ਦੀ ਕਿਤਾਬ ਦਾ ਪਹਲਾ ਚੈਪਟਰ। □

ਨੋਟੇਸ਼ਨ ਬਾਰੇ ਹੋਰ : ਪਲੇਨ $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ ਦੇ ਪੌਐਂਟ (x, y) ਹੀ ਹਨ ਕੌਮਪਲੈਕਸ ਨੰਬਰ $z = x + iy$, ਮਸਲਨ $(0, 1) = i$ (ਜਦੋਂ ਨਹੀਂ ਹੈ ਇਹ ਅੱਖਰ ਕੋਈ ਇਣਡੈਕਸ!) ਤੇ 2-ਸਫ਼ੀਅਰ $\widehat{\mathbb{R}^2} = \widehat{\mathbb{C}}$ ਦੀ ਮੌਬੀਅਸ ਜਮੈਟਰੀ ਦਿਆਂ ਗੱਲਾਂ ਹੀ ਜਾਰੀ ਹਨ ਇਹ ਕੌਮਪਲੈਕਸ ਨੰਬਰਾਂ ਨਾਲ, ਮਸਲਨ ਚਪਟੇ ਸ਼ੀਸ਼ੇ x-ਐਕਸਿਸ ਵਿਚ ਇਣਵਰਸ਼ਨ ਵਜਦੀ ਹੈ ਕੌਨਜੁਗੇਸ਼ਨ $\bar{z} = x - iy$। ਸਾਡੇ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨਜ਼ ਤੇ ਫ਼ੌਰਮਜ਼ ਸਬ ਸਮੂਦ ਤੇ ਕੌਮਪਲੈਕਸ ਵੈਲਯੁਡ ਹਨ, ਸੋ ਪਲੇਨ ਉਤੇ ਹਰ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨ g ਦੇ $dg = \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy$ ਨੂੰ ਅਸੀਂ 1-ਫ਼ੌਰਮਜ਼ ਦੇ ਨੰਵੇ ਬੇਸਿਸ $dz = dx + idy, d\bar{z} = dx - idy$ ਵਿਚ ਵੀ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਜੋ ਦਿੰਦਾ ਹੈ $dg = \frac{\partial g}{\partial z} dz + \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$, ਜਿੱਥੇ $\frac{\partial g}{\partial z} := \frac{1}{2}(\frac{\partial g}{\partial x} - i\frac{\partial g}{\partial y})$ ਤੇ $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}(\frac{\partial g}{\partial x} + i\frac{\partial g}{\partial y})$। ਸੋ ਜੇ ਰੀਅਲ ਅਤੇ ਇਮੈਜਨਰੀ ਪਾਰਟਸ ਵਿਚ $g(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ ਤਾਂ $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}((\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}) + i(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}))$

ਸੋ ਵਾਕੇਆਈ $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = 0$ ਦਾ ਭਾਵ ਹੈ g ਹੋਲੋਮੋਰਫ਼ਿਕ। $\square$

ਕੋਮਪਲੈਕਸ ਮੈਨੀਫ਼ੋਲਡ ਨੂੰ ਕਵਰ ਕਰਦੇ ਹਨ ਚਾਰਟਸ ਜਿਹਨਾਂ ਦਾ ਆਪਸੀ ਰਿਸ਼ਤਾ ਹੋਲੋਮੋਰਫ਼ਿਕ ਹੈ, ਸੋ ਲਾਜ਼ਮੀ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਈਵਣ ਡਾਈਮੈਨਸ਼ਨੀ ਤੇ ਓਰੀਐਂਟੇਬਲ ਹੈ, ਅੱਤੇ ਕਈ ਹੋਰ ਬੰਦਿਸ਼ਾਂ ਦੀ ਕੁੰਜੀ ਹੈ ਇਹਦੀ ਹੌਜ ਬਾਈਗਰੇਡਿੰਗ: $E_0^{p,q}$ ਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਸਾਰੇ $(p+q)$–ਫ਼ੋਰਮ ਜੋ ਚਾਰਟਸ $(z_1, \ldots, z_m)$ ਵਿਚ ਲਿਖੇ ਜਾ ਸਕਦੇ ਨੇ ਠੀਕ p dz_i ਤੇ ਠੀਕ q $d\overline{z_j}$ ਦੇ ਵੈਜ ਲੈਕਰ, ਸੋ ਇਹਦਾ ਰੈਂਕ ਹੈ $\binom{m}{p}\binom{m}{q}$ ਸਾਰੀਆਂ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨਜ਼ $E_0^{0,0}$ ਉੱਤੇ। ਜਿਸ ਤੇ $dg = \partial g + \overline{\partial} g$ ਜਿੱਥੇ $\partial g = \frac{\partial g}{\partial z} dz$ ਤੇ $\overline{\partial} g = \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$। ਸੋ ਸਾਰੇ ਫ਼ੌਰਮਜ਼ ਤੇ ਉਪਲੱਬਧ ਹੈ $\mathbb{C}$–ਲੀਨੀਅਰ ਸਪਲਿਟਿੰਗ $d = \partial + \overline{\partial}$ ਦੋ ਬਾਈ–ਡਿਗਰੀ $(1,0)$ ਤੇ $(0,1)$ ਦੇ ਮੈਪਸ ਵਿਚ, ਤੇ $d^2 = 0$ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੀ ਹੈ $\partial^2 = \partial\overline{\partial} + \overline{\partial}\partial = \overline{\partial}^2 = 0$।

ਸੋ E_0 ਦਾ ਪਹਲਾ ਕੌਲਮ $p = 0$, ਫ਼ੇਰ ਪਹਲੇ ਦੋ ਕੋਲਮ $p = 0, 1$, ਵਗੈਰਾ, ਹਟਾਣਾ ਦਿੰਦਾ ਹੈ ਇਕ ਘੱਟਦਾ ਸੀਕਵੈਂਸ ਡੀਰਾਮ ਸਬਕੌਮਪਲੈਕਸਾਂ ਦਾ, ਅੱਤੇ ਅਸੀਂ ਐਸ ਫ਼ਿਲਟਰੇਸ਼ਨ ਨਾਲ ਜੁੜੇ ਸਪੈਕਟਰਲ ਸੀਕਵੈਂਸ (E_k, d_k) ਦੀ ਹੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰ ਰਹੇ ਹਾਂ (ਜਿਹੜਾ ਰੋਜ਼ ਨੂੰ ਹਟਾਣ ਨਾਲ ਸਪੈਕਟਰਲ ਸੀਕਵੈਂਸ ਡੀਫ਼ਾਇਣ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਓਹ ਕੌਮਪਲੈਕਸ ਕੌਨਜੁਗੇਸ਼ਨ ਥੱਲੇ ਆਈਸੋਮੌਰਫ਼ਿਕ ਹੈ) ਸੋ $d_0 = \overline{\partial}$।

ਮਸਲਨ ਜੇ $m = 1$ ਤਾਂ E_0 ਵਿਚ ਸਿਰਫ਼ $E_0^{0,0}, E_0^{0,1}, E_0^{1,0}, E_0^{1,1}$ ਨੋਨਜ਼ੀਰੋ ਹਨ, ਚਾਰਾਂ ਦਾ ਰੈਂਕ ਹੈ ਇਕ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨਜ਼ ਉੱਤੇ, ਤੇ $g \mapsto \frac{\partial g}{\partial \bar{z}}(g) d\bar{z}$, $g dz \mapsto \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz$ ਦਿੰਦਾ ਹੈ d_0। ਸੋ ਵਾਕੇਆਈ ਨਤੀਜਾ ਉਤਲਾ ਬਰਾਬਰ ਸੀ ਕਹਣਿ ਦੇ ਕਿ $\mathbb{C}$ ਦੇ ਹਰ ਓਪੈਣ ਸੈਟ ਲਈ E_1 ਵਿਚ ਸਿਰਫ਼ $E_!^{0,0}, E_1^{1,0}$ ਨੋਨਜ਼ੀਰੋ ਹਨ ਤੇ ਇਹਣਾਂ ਵਿਚ ਹਨ ਕਰਮਵਾਰ ਸਾਰੀਆਂ ਹੋਲੋਮੌਰਫ਼ਿਕ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨਜ਼ ਤੇ 1–ਫ਼ੌਰਮਜ਼। ਅੱਗੇ ਇਸ ਹੋਲੋਮੋਰਫ਼ਿਕ ਡੀਰਾਮ ਕੌਮਪਲੈਕਸ $d_1 = d : E_!^{0,0} \to E_1^{1,0}$ ਦੀ ਹੌਮੋਲੀਜੀ E_2 ਕਿਉਂਕਿ ਫ਼ਾਈਨਲ ਹੈ, ਜ਼ਰੂਰ $E_2^{0,0} \cong \mathbb{C}^{b_o}, E_2^{1,0} \cong \mathbb{C}^{b_1}$ ਜਿਥੇ b_0 ਤੇ b_1 ਹਨ ਬੈਟੀ ਨੰਬਰ ਓਪੈਣ ਸੈਟ ਦੇ, ਤੇ $d_2 = 0$।ਦਰਅਸਲ ਇਹ ਸਭ ਕੁਝ ਕੋਈ ਓਪੱਣ ਰੀਮਾਨ ਸਰਫ਼ੈਸ ਲਈ ਵੀ ਸਹੀ ਹੈ, ਪਰ ਜੇ ਕਲੋਜ਼ਡ ਤਾਂ $b_2 = 1$ ਤੋਂ ਹੀ ਸਾਫ਼ ਹੈ ਕਿ ਨਹੀਂ ਹੁਣ ਦੋਲਬੋ ਵੈਨੇਸ਼ਿੰਗ।

ਵਾਪਸ ਆਂਦੇ $\int \frac{dz}{f(z)}$ ਨੂੰ, ਜਿੱਥੇ f ਦੀ ਡਿਗਰੀ $\delta > 1$, ਅਸੀਂ ਇਹ ਤਾਂ ਦੇਖ ਲਿ'ਤਾ ਸੀ ਕਿ ਪੀਰੀਅਡ ਗਰੂਪ ਦਾ ਰੈਂਕ $\{\widehat{C}$ ਮਨਫ਼ੀ ਰੂਟਸ$\}$ ਦੇ ਬੈਟੀ ਨੰਬਰ $\beta_1 = \delta - 1$ ਤੋਂ ਵੱਧ ਨਹੀਂ, ਪਰ ਤਸ਼ਤੀਫ਼ ਕਰਣੀ ਬਾਕੀ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਕਿੰਵੇਂ ਸਵੈਲੋਟੇਲ $\heartsuit_\delta$ ਦੀ ਇਕੁਏਸ਼ਨ $f = 0$ ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਕਰਣ ਤੋਂ ਪਹਲਾਂ ਯਾਦ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜੇ ਡਿਗਰੀ ਈਵਨ ਐਸ ਮੈਨੀਫ਼ੋਲਡ ਨੂੰ ਕੌਮਪੈਕਟੀਫ਼ਾਈ ਕਰਨ ਦਾ ਇਕ ਤਰੀਕਾ ਹੈ ਰੂਟਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇਆਂ ਵਿਚ $\frac{\delta}{2}$ ਡਿਸਜੌਐਂਟ ਕੱਟ ਮਾਰਣ ਬਾਦ 'ਡੱਬਲ' ਕਰਣਾ। ਜੋ ਦਿੰਦਾ ਹੈ ਜੀਨਸ $\frac{\delta}{2} - 1$ ਦਾ ਕਲੋਜ਼ਡ ਰੀਮਾਨ ਸਰਫ਼ੈਸ ਤੇ ਅਗਲੇ ਸੈਕਸ਼ਨ 'ਚ ਅਸੀਂ ਦੇਖਾਂ ਗੇ ਕਿ $\int \frac{dz}{\sqrt{f(z)}}$ ਦੇ ਪੀਰੀਅਡਜ਼ ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਯੌਰਦਾਂ ਦਾ ਇਕੁਏਸ਼ਨ ਹਲ ਕਰਣ ਦਾ ਤਰੀਕਾ ਐਸ ਕੌਮਪੈਕਟੀਫ਼ਿਕੇਸ਼ਨ ਨਾਲ ਬੰਧੇਆ ਹੈ, ਫ਼ਿਲਹਾਲ ਅਸੀਂ ਐਸ ਤੋਂ ਸਰਲ ਇਨਟੀਗਰਲ ਨਾਲ ਵਾਕਫ਼ੀਅਤ ਕਰ ਸਮਝੋ ਖੁਦ ਨੂੰ 'ਵੌਰਮ–ਅਪ' ਕਰ ਰਹੇਂ ਹਾਂ! ਨੋਟ $\heartsuit_\delta$ ਵਿਚ ਸਾਰੇ ਐਫ਼ਾਇਨ ਡਿਗਰੀ $\delta - 1$ ਇਕੁਏਸ਼ਨ ਵੀ ਹਨ--ਓਹ ਜਿਨਹਾਂ ਦਾ ਇਕ ਰੂਟ ਇਨਫ਼ੀਨੀਟੀ ਤੇ ਹੇ--ਸੋ ਡਿਗਰੀ ਈਵਣ ਮਣਨ ਨਾਲ ਕੋਈ ਹਰਜ਼ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ।

ਲਗਦਾ ਹੈ ਐਂਵੀ ਹੀ $\mathbb{C}^n$ ਦਾ ਕੋਈ ਓਪੈਣ ਸੈਟ U ਹੈ ਜੇ ਸ਼ਟਾਇਨ - ਜਿੰਵੇ ਕਿ ਕੋਈ $K^n \subset \mathbb{C}^n$ ਦਾ ਗਵਾਂਡ? - ਤਾਂ ਓਹਨੂੰ 'ਡੱਬਲ' ਕਰ ਮਿਲਦਾ ਹੇ ਕਲੋਜ਼ਡ ਕੌਮਪਲੈਕਸ ਕਾਹਲਰ ਮੈਨੀਫ਼ੋਲਡ? ਸੋ ਇਹਦੀ ਹੋਮੌਲੀਜੀ - ਜੋ K^n ਦੇ ਕੌਮਬੀਨੈਟੋਰਿਕਸ ਉੱਤੇ ਚਾਣਨ ਪਾਂਦੀ ਹੈ, ਸ਼ਾਇਦ ਇਹਦੇ ਹੈਵੁਡ ਇਨਇਕੁਐਲੀਟੀ ਵੀ ਦੇ ਦੇਵੇ? - ਬੜੀ ਹੀ ਖਾਸ ਹੈ : ਹੁਣ ਦੋਲਬੋ ਹੋਮੋਲੀਜੀ E_1 ਫ਼ਾਈਨਲ ਹੈ ਤੇ ਪਵਾਂਕਾਰੇ–ਸੇਅਰ ਡੁਐਲੇਟੀ $E_1^{p,q} \cong E_1^{n-p,n-q} \cong E_1^{n-q,n-p}$ ਮੂਲ $(1,1)$ ਕਲਾਸ ਨਾਲ ਜ਼ਰਬਾਂ ਮਾਰ ਮਿਲਦੀ ਹੈ, ਸੋ ਫ਼ੇਰ ਇਹੋ ਹਾਰਡ ਲੈਫ਼ਸਸ਼ੈਟਸ ਥੀਓਰਮ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਾਂਗੇ ਕੌਮਬੀਨੈਟੌਰੀਕਸ ਲਈ।

ਰੂਟ $f = 0$ ਦੇ ਦਿੰਦੇ ਹਨ $\int \frac{dz}{f(z)}$ ਦੇ ਪੀਰੀਅਡ, ਪਰ ਵਾਪਸ ਇਹ ਹਦ ਰੂਟਾਂ ਚ ਅੰਤਰ $a_j - a_k$ ਹੀ ਦੇ ਸਕਦੇ ਹਨ, ਕਿਉਂਕਿ ਪੀਰੀਅਡ ਸਨ $2\pi i \sum_j n_j A_j$ ਜਿੱਥੇ $A_j = \prod_{k \neq j} \frac{1}{a_j - a_k}$; ਐਣੀਵੇ ਕਾਫ਼ੀ ਹਨ ਸਾਰੇ ਅੰਤਰ, ਕਿਉਂਕਿ $\sum_j a_j$ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਇਕੁਏਸ਼ਨ $f = 0$ ਤੋਂ ਝੱਟ ਪੜ ਸੱਕਦੇ ਹਾਂ। ਡਿਗਰੀ ਦੋ ਲਈ ਸੌਖਾ ਹੈ ਕੰਮ, $a_1 - a_2 = \frac{1}{A_1}$, ਪਰ ਐਸ ਬਾਦ ਡਿਗਰੀ ਤਿਣ ਲਈ ਅੰਤਰਾਂ ਦੇ ਸਕਵੇਅਰ ਲਿਖੱਣ ਦੇ ਹੀ ਦਿੱਖਦੇ ਹਣ ਤਰੀਕੇ, ਮਸਲਨ :- $(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_2 - a_3)A_1 = (a_2 - a_3)$ ਵਗੈਰਾ

ਨੂੰ ਸਕਵੇਅਰ ਕਰੋ, ਲਿਖਦੇ ਡਿਸਕਰੀਮੀਨੈਂਟ $(a_1-a_2)^2(a_1-a_3)^2(a_2-a_3)^2$, ਰੂਟਾਂ ਦੀ ਇਕ ਸਮਿਟਰਿਕ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨ, ਨੂੰ $f=0$ ਦੇ ਕੋਐਫ਼ੀਸ਼ੈਂਟਸ ਵਿਚ। □

ਫ਼ੀਲਡ $\mathbb{F}$ ਜੋ ਜੈਨੇਰੇਟ ਕਰਦੇ ਹਨ $f=0$ ਦੇ ਕੋਐਫ਼ੀਸ਼ੈਂਟ, ਦੀ ਸੱਭ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਐਕਸਟੈਨਸ਼ਨ ਜਿਸ ਵਿਚ ਹਨ ਸਾਰੇ ਅੰਤਰ a_j-a_k, ਓਹੀ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿਚ ਹਨ ਸਾਰੇ ਰੂਟ a_j, ਪਰ ਅਮੂਮਣ ਵੱਡੀ ਹੈ ਓਸ ਤੋਂ ਜਿਸ ਵਿਚ ਹਨ ਸਾਰੇ A_j। ਕਿੱਣਾ ਵੱਡਾ ਹੋ ਸਕਦੈ ਫ਼ੀਲਡ $\mathbb{F}(a_j)$ ਸਬ-ਫ਼ੀਲਡ $\mathbb{F}(A_j)$ ਤੋਂ? ਡਿਗਰੀ ਤਿਣ ਲਈ ਅਸੀਂ ਵੇਖੇਆ ਉੱਤੇ ਇਹ ਹੱਦ ਕਵਾਡਰੇਟਿਕ ਐਕਸਟੈਨਸ਼ਨ ਹੈ, ਤੇ ਮਸਲਨ $x^3-5x=0$ ਲਈ ਵਾਕੇਆਈ $\mathbb{F}(a_j)=\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ ਦੀ $\mathbb{F}(A_j)=\mathbb{Q}$ ਉੱਤੇ ਡਾਈਮੈਨਸ਼ਨ ਦੋ ਹੈ। ਪਰ ਸਬ-ਐਕਸਟੈਨਸ਼ਨ $\mathbb{F}(A_j)$ ਵੀ ਰੂਟਾਂ ਦੀਆਂ ਪਰਮੁਟੇਸ਼ਨਜ਼ ਥੱਲੇ ਕਾਇਮ ਹੈ:- $a_j \leftrightarrow a_k$ ਇਨਡੀਊਸ ਕਰਦੀ ਹੈ ਟਰਾਂਸਪੋਜ਼ੀਸ਼ਨ $A_j \leftrightarrow A_k$। □ ਸੋ A_j ਵਿਚ ਸਮੀਟਰਿਕ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨਜ਼ ਨੂੰ ਵੀ ਅਸੀ $f=0$ ਦੇ ਕੋਐਫ਼ੀਸ਼ੈਂਟਸ ਜ਼ਰੀਏ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਮਸਲਨ $\sum_j A_j=0$ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਸਿਧ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ, ਤੇ ਝੱਟ ਚੈਕ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ $(-1)^{\binom{n}{2}}\prod_j \frac{1}{A_j}$ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਡਿਸਕਰੀਮੀਨੈਂਟ d ਦੇ।

ਪਰ ਮੋਬੀਅਸ ਜਮੈਟਰੀ ਵਿਚ ਅੰਤਰਾ ਦੇ ਰੇਸ਼ੋ ਵੱਧ ਕੁਦਰਤੀ ਹਨ, ਤੇ ਡਿਗਰੀ ਤਿਣ ਲਈ $\frac{A_1}{A_2}=\frac{a_2-a_3}{a_1-a_3}$, ਡਿਗਰੀ ਚਾਰ ਲਈ $\frac{A_1A_3}{A_2A_4}=-(\frac{a_2-a_4}{a_1-a_3})^2$, ਡਿਗਰੀ ਛੇ ਲਈ $\frac{A_1A_3A_5}{A_2A_4A_6}=$ ਵਗੈਰਾ, ਤੋਂ ਆਸ ਬੰਧਣ ਲੱਗਦੀ ਹੈ ਕਿ ਅਸੀਂ ਇਹ ਰੈਸ਼ੋ ਪੀਰੀਅਡਜ਼ ਦੇ ਸੱਰਡਜ਼ ਚ ਲਿਖੇ ਸਕਦੇ ਹਾਂ? ਜਾਪਦਾ ਹੈ ਕਿ ਹਮੇਸ਼ਾਂ $\mathbb{F}(a_j)$ ਸੋਲਵੇਬਲ ਹੈ $\mathbb{F}(A_j)$ ਉੱਤੇ, ਤੇ ਹੋ ਸਕਦੈ ਕੰਪਾਸ ਤੇ ਰੂਲਰ ਹੀ ਕਾਫ਼ੀ ਹੋਨ, ਭਾਵ, ਕਵਾਡਰੇਟਿਕ ਐਕਸਟੈਨਸ਼ਨਜ਼ ਦੀ ਇਕ ਲੜੀ ਲੈ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਸਾਨੂੰ ਨਿੱਕੇ ਤੋਂ ਵੱਡੇ ਫ਼ੀਲਡ ਤੱਕ?

ਜੀਨੀਰਿਕਲੀ ਸਾਰੀਆਂ $a_1,\ldots,a_n$ ਦੀਆਂ ਈਵਨ ਪਰਮੂਟੇਸ਼ਨਜ਼ ਥੱਲੇ $\tilde{\mathbb{F}}(a_i)$ - ਜਿਥੇ $\tilde{\mathbb{F}}$ ਹੈ $\mathbb{F}$ ਦੀ ਐਕਸਟੈਨਸ਼ਨ ਡਿਸਕਰੀਮੀਨੈਂਟ ਦੇ ਸਕਵੇਅਰ ਰੂਟਸ $\pm\sqrt{d}$ ਨਾਲ - ਦਾ ਫ਼ਿਕਸਡ ਫ਼ੀਲਡ ਜਾਪਦਾ ਹੈ $\tilde{\mathbb{F}}$, ਪਰ $n>4$ ਲਈ ਇਹ ਪਰਮੂਟੇਸ਼ਨ ਗਰੂਪ ਸਿੰਪਲ ਹੈ, ਸੋ $\tilde{\mathbb{F}}(A_i)=\tilde{\mathbb{F}}(a_i)$? ਭਾਵ, ਜਮਾਂ ਮਨਫ਼ੀ ਜ਼ਰਬ ਤਕਸੀਮ ਤੇ ਇਕੋ ਸਕਵੇਅਰ ਰੂਟ ਵਰਤਦੇ ਅਸੀਂ ਇਕੁਏਸ਼ਨ $f=0$ ਦੇ ਹਰ ਰੂਟ a_i ਨੂੰ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਓਹਦੇ ਕੋਐਫ਼ੀਸ਼ੈਟਸ ਤੇ ਇਨਟੈਗਰਲਜ਼ $\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{dz}{f(z)}$ ਵਿਚ। ਸਪਸ਼ਟ ਤੌਰ ਤੇ ਕਿ ਹਨ ਫ਼ੌਰਮੂਲੇ? ਕਿ ਇਹ ਹਲ ਕਰਦੇ ਹਨ ਹਰ ਇਕੁਏਸ਼ਨ ਨੂੰ? ਅੱਗੇ, ਨਾਲ $f=0$ ਦੇ ਬੰਧੀ ਹੈ ਇਕ ਝੂਠੀ ਟਾਈਲਿੰਗ--ਭਾਵ ਸਾਰੇ ਵਰਟੈਸਿਸ ਬਾਉਂਡਰੀ ਤੇ--ਓਪੈਣ ਡਿਸਕ ਦੀ ਜਿਹਨੂੰ ਫ਼ੋਲਡ ਕਰ ਬਣਦਾ ਹੈ $\widehat{\mathbb{C}}\setminus\{a_i\}$ ਤੇ ਜੋ ਜੁੜੀ ਹੀ ਉਪਰੋਕੱਤ ਕੋਸ਼ੀ ਪੀਰੀਅਡਜ਼ ਨਾਲ ...

ਇਕ ਕੁਦਰਤੀ ਸੱਚੀ ਟਾਈਲਿੰਗ--ਭਾਵ ਕੌਮਪੈਕਟ ਟਾਈਲਾਂ ਵਾਲੀ--ਵੀ ਅਸੀਂ ਹਰ ਡਿਗਰੀ $n\geq 4$ ਦੀ ਇਕੁਏਸ਼ਨ $f=0$ ਨਾਲ ਬਹੁਤ ਪਹਲਾਂ ਬੰਧ ਚੁਕੇ ਹਾਂ--ਦੇਖੋ ਭਾਗ ਚੌਥਾ, ਕੁਝ ਨੋਟ ੫੦ ਵੀ--ਤੇ ਅਗਲਾ ਨੋਟ ਦਰਅਸਲ ਉਸੇ ਕੁ ਟਾਇਮ ਦਾ ਲਿੱਖੇਆ ਹੈ ਇਕ ਅਡੈਨਡਮ।

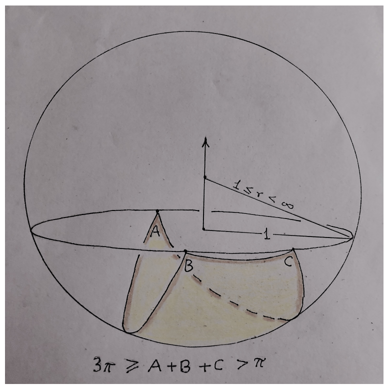
੫੯. ਭਾਗ ਚੌਥੇ ਵਿਚ ਅਸੀਂ ਬਣਾ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ ਹਾਫ਼ ਟਰਨਜ਼ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਨਾਲ, ਯੁਨਿਟ ਸਰਕਲ ਦੇ ਦਿੱਤੇ ਕੋਈ $n\geq 4$ ਪੌਐਂਟਸ ਤੋਂ, ਇਕ ਕੌਨਸੈਂਟਰਿਕ ਰੇਡੀਅਸ $c>1$ - ਸਿਰਫ਼ $n=4$ ਲਈ $c=\infty$ - ਦੀ ਜਮੈਟਰੀ ਵੱਜੋਂ ਕਰਿਸਟੈਲੌਗਰਾਫ਼ਿਕ ਟਈਲਿੰਗ $\{n,n\}$। ਮਤਲਬ, ਸਾਰੀਆਂ ਟਾਇਲਾਂ ਕੌਨਗਰੁਐਂਟ ਹਨ ਦਿੱਤੇ n ਵਰਟਿਸਿਸ ਵਾਲੇ ਯੁਨਿਟ ਸਰਕਲ ਦੇ ਇਨਸਕਰਾਇਬਡ ਬੀਜ n-ਗੌਨ ਨਾਲ, ਅਤੇ ਜੇ ਦੋ ਟਾਇਲਾਂ ਦੀ ਸਾਂਝੀ ਭੁਜਾ ਹੈ ਤਾਂ ਇਹਦੇ ਮਿਡ-ਪੌਐਂਟ ਗਿਰਦ ਓਹਨਾਂ ਦਾ ਯੁਨਿਅਣ ਸੀਮਿਟਰਿਕ ਹੈ, ਅਤੇ ਟਾਈਲਿੰਗ ਦੇ ਹਰ ਵਰਟੈਕਸ ਤੇ n ਟਾਇਲਾਂ ਹਨ।

ਐਂਵੇਂ ਹੀ ਕੁਝ ਬਣਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਅਸੀਂ, ਸਫ਼ੈਰਿਕਲੀ ਕਰਿਸਟੈਲੋਗਰਾਫ਼ਿਕ ਟੈਟਰਾਹੈਡਰਣ $\{3,3\}$ ਯੁਨਿਟ ਸਰਕਲ ਦੇ ਕੋਈ $n=3$ ਪੌਐਂਟਸ ਤੋਂ ਚਲ:- ਵਿਚਾਰੋ ਰੈਡੀਅਸ਼ $r\geq 1$ ਦਾ ਸਫ਼ੀਅੱਰ ਯੁਣਿਟ ਸਰਕਲ ਚੋਂ ਲੰਘਦਾ ਜਿਹਦਾ ਸੈਂਟਰ ਐਣ ਇਹਦੇ ਸੈਂਟਰ ਉਪੱਰ ਹੈ। ਤਿਣੋ ਪੌਐਂਟਸ ਨੂੰ ਗਰੇਟ ਸਰਕਲ 'ਰੇਖਾਂਵਾਂ' ਨਾਲ ਜੋੜ ਦੋ। ਜਿੰਵੇਂ r ਵਧਦਾ ਹੈ 1 ਤੋਂ ∞ ਵਲ, ਐਸ ਸਫ਼ੈਰੀਕਲ ਟਰਾਏਂਗਲ ਦੇ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਕੌਂਟੀਨੁਅੱਸਲੀ ਘੱਟਦਾ ਹੈ 3π ਤੋਂ π ਵਲ। ਲੈ ਲਓ ਓਹ r ਜਿਥੇ ਇਹ 2π ਹੈ। ਲਗਾਓ ਹੁਣ ਭੁਜਾਂਵਾ ਦੇ ਮਿਡ-ਪੌਐਂਟਸ ਗਿਰਦ ਸਫ਼ੈਰੀਕਲ ਹਾਫ਼ ਟਰਨਜ਼, ਮਿਲ ਗਿਆ ਇਹ ਟੈਟਰਾਹੈਡਰਣ। □

ਸੋ ਸਾਡੇ ਟੈਟਰਾਹੈਡਰਣ ਦੇ ਹਰ ਤੀਕੋਣ ਦਾ ਛੇਤਰਫ਼ਲ ਹੈ πr^2, ਜੋ ਮੇਲ ਖਾਂਦਾ ਹੈ $(A+B+C-\pi)r^2$ ਨਾਲ, ਕਿਸੀ ਵੀ ਸਫ਼ੈਰੀਕਲ ਤੀਕੋਣ ਦਾ ਏਰੀਏ। ਦੁਜੇ, ਨੋਟ ਇਹ r ਜਿਥੇ ਐਂਗਲ-ਸਮ 2π ਹੈ, ਨਿਰਭਰ ਕਰਦਾ ਹੈ ਸਰਕਲ ਦੇ ਤਿਣ ਪੌਐਂਟਸ ਤੇ ਜਿਹਨਾਂ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਚੱਲੇ ਸੀ। ਤੇ ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟਾ ਹੈ ਇਹ ਜਦੋਂ ਇਹਣਾਂ

ਵਿਚ ਦੂਰੀਆਂ ਬਰਾਬਰ ਹਨ, ਜਦੋਂ ਬਣੂ ਰੈਗੁਲਰ ਟੈਟਰਾਹੈਡਰਣ।

ਐਸ ਕੇਸ ਵਿਚ ਤਿਣੋਂ ਐਂਗਲ ਬਰਾਬਰ ਹਨ ਹਰ r ਲਈ, ਤੇ ਜਦੋਂ ਇਹ $\pi/2$ ਅਤੇ $2\pi/5$ ਹੋਣਗੇ, ਮਿਲ ਜਾਉ ਸਾਣੂ ਰੈਗੁਲਰ ਓਕਟਾਹੈਡਰਣ ਅਤੇ ਰੈਗੁਲਰ ਆਈਕੋਸਾਹੈਡਰਣ, ਤੇ ਫ਼ੇਰ ਲੀਮਿਟ $r = \infty$ ਤੇ ਸਾਰੇ ਪਲੇਨ ਦੀ ਰੈਗੁਲਰ $\{3,6\}$ ਟਾਈਲਿੰਗ। ਬਾਕੀ ਕੇਸਿਸ ਵਿਚ ਹੋਰ ਕੋਈ ਅਧ-ਡੀਫ਼ੋਰਮੱਡ ਪਲੈਟੋਨਿਕ ਸੌਲਿਡ ਤਾਂ ਨਹੀਂ ਟੱਕਰੁਗਾ, ਪਰ ਲੀਮਿਟ $r = \infty$ ਤੇ ਹੈ ਹੁਣ ਪਲੇਨ ਦੀ $\{3,6\}$ ਟਾਈਲਿੰਗ ਜੋ ਬਣਦੀ ਹੈ ਹਾਫ਼-ਟਰਜ਼ ਨਾਲ ਕਿਸੀ ਵੀ ਦਿੱਤੇ ਤਿਕੋਣ ਤੋਂ ਚਲ। ਐਸ ਟਾਈਲਿੰਗ ਤੋਂ ਮਿਲਦੀ ਹੈ ਇਕ ਹੋਰ ਇਲਿਪਟਿਕ, ਮਤਲਬ $\mathbb{C}$ ਉੱਤੇ ਦੋਹਰੀ ਪੀਰੀਓਡਿਕ ਤੇ ਮੈਰੋਮੋਰਫ਼ਿਕ, ਫ਼ੰਕਸ਼ਨ।



ਨੋਟ : (ੳ) ਸਫ਼ੈਰੀਕਲ ਕੌਨਵੈਕਸ ਹੱਲ ਹਨ ਵਰਟੇਸਿਸ ਦੇ ਚਾਰੋਂ ਤਿਕੋਨ-ਦੇਖੋ ਚਿਤਰ-ਐਂਟੀਪੋਡਲ ਜੋੜੇ ਜੋ ਨਹੀਂ ਓਹਣਾਂ ਵਿਚ। ਤਿਕੋਨ ABC ਦੀ ਬਾਜੂ BC ਦੇ ਮੱਧ α ਚੋਂ ਜਾਂਦੀ ਐਕਸਿਸ ਗਿਰਦ ਹਾਫ਼-ਟਰਨ ਨਾਲ ਬਣੇਆ DCB ਵੀ ਐਂਟੀਪੋਡ $-\alpha$ ਦੇ ਕੌਮਪਲੀਮੈਂਟ ਵਿਚ ਹੇ ਤੇ ਦੋਆਂ ਦੀ ਇੰਟਰਸੈਕਸ਼ਨ ਹੈ ਇਹ ਬਾਜੂ। ਇਹ ਤੱਥ ਤੇ ਛੇਤਰਫਲ ਤੋਂ ਪੱਕੀ ਹੈ $ABCD$ ਦੀ ਐਗਸਿਸਟੈਂਸ। (ਅ) ਇਹ ਹਾਫ਼-ਟਰਨ ਦਿੰਦੀ ਹੈ ਪਰਮੁਟੇਸ਼ਨ $DCBA$, ਬਾਜੂ AD ਦੀ ਓਹੀ ਲੰਬਾਈ ਹੈ ਜੋ BC ਦੀ ਹੈ, ਤੇ ਐਕਸਿਸ ਦਾ ਦੂਜਾ ਸਿਰਾ $-\alpha$ ਓਹਦਾ ਮਿਡ-ਪੌਐਂਟ ਹੈ। (ੲ) ਤਿਕੋਨਾਂ ਦੇ ਬਾਜੁਆਂ ਦਿਆਂ ਤਿਣ ਲੰਬਾਈਆਂ ਕਿਉਂਕਿ ਅਮੁਮਣ ਭਿਣ ਹਨ, ਸਮਿਟਰੀ ਗਰੁਪ ਵਿਚ ਹਨ ਸਿਰਫ਼ ਚਾਰ ਐਲੀਮੈਂਟ, ਆਈਡੈਂਟੀਟੀ ਤੇ ਹਾਫ਼ ਟਰਨਜ਼ $DCBA, CDAB$ ਤੇ $BADC$। (ਸ) ਦੂਜੇ ਹੱਥ ਲਿਮੀਟਿੰਗ ਚਪਟੇ ABC ਦਿਆਂ ਤਿਣ ਬਾਜੁਆਂ ਨੂੰ ਅਧ-ਘੁਮਾਂਦੇ ਪਲੇਨ ਦੇ ਮੋਸ਼ਨ ਜੈਨੇਰੇਟ ਕਰਦੇ ਹਨ ਇਨਫੇਨਾਇਟ ਗਰੁਪ ਤੇ ਟਾਈਲਿੰਗ $\{3,6\}$, ਛੇ ਤਿਕੋਣੀ ਟਾਇਲਾਂ ਹਰ ਵਰਟੈਕਸ ਤੇ। (ਹ) ਸੋ ਹੁਣ ਤਿਣੋਂ ਹਾਫ਼ ਟਰਨਜ਼ ਦੀ ਕੌਮਪੋਜ਼ੀਸ਼ਨਜ਼ ਆਈਡੈਂਟੀਟੀ ਨਹੀਂ, ਓਹਦਾ ਸਕਵੇਅਰ ਹੀ ਆਈਡੈਂਟੀਟੀ ਹੈ। ਇਹ ਤਿਣ ਤੇਹਰੀ ਕੌਮਪੋਜ਼ੀਸਨਾਂ ਨਾਲ ਜੈਨੇਰੇਟਿਡ ਟਾਈਲਿੰਗ ਦੇ ਤਿਕੋਨ ਦੂਨੇ ਸਾਇਜ਼ ਦੇ ਹਨ, ਹਰ ਵਿਚ ਚਾਰ ਛੋਟੇ ਤਿਕੋਨ, ਤੇ ਐਸ ਇਣਡੈਕਸ ਚਾਰ ਸਬਗਰੂਪ ਨਾਲ ਫ਼ੋਲਡ ਕਰ ਪਲੇਨ ਨੂੰ ਫੇਰ ਬਣ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਇਹੋ ਕਰਿਸਟੈਲੋਗਰਾਫ਼ਿਕ ਟੈਟਰਾਹੈਡਰਣ।

੬੦. ਕੌਮਪੈਕਟ $\{n,n\}$ ਟਾਈਲਾਂ ਨੂੰ ਪੂਰਾ ਫ਼ੋਲਡ ਕਰ ਬਣਦਾ ਹੈ 2-ਸਫ਼ੀਅਰ $\widehat{\mathbb{C}}$ ਪਰ ਜੇ ਟਾਈਲਿੰਗ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਇਨਡੈਕਸ ਦੋ ਸਬਗਰੂਪ ਜੋ ਬਣਾਂਦੇ ਹਨ n ਹਾਫ਼ ਟਰਜ਼ ਦੇ ਸਾਰੇ ਈਵਨ ਕੌਮਪੋਜ਼ੀਸ਼ਨ ਨਾਲ ਹੀ ਤਕਸੀਮ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਮਿਲਦੀ ਹੈ ਇਕ ਕਲੋਜ਼ਡ ਰੀਮਾਨ ਸਰਫ਼ੈਸ M^2 ਦੀ ਯੂਨੀਵਰਸਲ ਕਵੱਰਇੰਗ। ਸ਼ੇਸ਼ ਤਕਸੀਮ ਦਿੰਦੀ ਹੈ ਇਕ ਹੋਲੋਮੋਰਫ਼ਿਕ ਦੋਹਰੀ ਬਰਾਂਚੱਡ ਕਵੱਰਇੰਗ $M^2 \to \widehat{\mathbb{C}}$। ਕੁਲ ਕੋਸ਼ੈਂਟ ਮੈਪ ਹੈ ਕੁਲ n ਹਾਫ਼ ਟਰਨਜ਼ ਗਰੂਪ ਥੱਲੇ ਪੀਰੀਓਡਿਕ ਇਕ ਮੈਰੋਮੌਰਫ਼ਿਕ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨ, ਭਾਵ ਰੀਮਾਣ ਸਫ਼ੀਅਰ $\widehat{\mathbb{C}}$ ਵਿਚ ਕੀਮਤਾਂ ਲੈਂਦੀ ਹੋਲੋਮੋਰਫ਼ਿਕ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨ। ਜੇ $n = 3, 4$ ਤਾਂ ਇਨਡੈਕਸ ਦੋ ਸਬਗਰੂਪ ਨੂੰ ਜੈਨੇਰੇਟ ਕਰਦੇ ਹਨ ਪਲੇਨ ਦੇ ਦੋ ਇਨਡੀਪੈਨਡੈਂਟ ਟਰਾਂਸਲੇਸ਼ਨ, ਸੋ ਇਹ ਦੂਹਰੀ ਪੀਰੀਓਡਿਕ ਮੈਰੋਮੌਰਫ਼ਿਕ ਯਾਣੀ ਕਿ ਇਕ ਇਲਿਪਟਿਕ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨ $z(u)$ ਹੈ।

ਕਿ ਇਹ $z(u)$ ਉਲਟਾਂਦੀ ਹੈ ਮਲਟੀਵੈਲੀਯੁਡ 'ਫ਼ੰਕਸ਼ਨ' $u(z) = \int^z \frac{dz}{\sqrt{f(z)}}$ ਜੋ ਦਿੰਦੇ ਹਨ $\mathbb{C} \setminus \{a_i\}$ ਦੇ ਇਕ ਬੇਸ ਪੌਐਂਟ ਤੋਂ ਚਲਦੇ z ਤੱਕ ਜਾਂਦੇ ਸਾਰੇ ਪਾਥ ਇਨਟੀਗਰਲ? ਕਿਉਂਕਿ ਇਨਟਿਗਰੈਂਡ ਹੋਲੋਮੋਰਫ਼ਕ

ਹੈ $u(z)$ ਦੀ ਐਮਬਿਗੁਟੀ ਸੀਮਿਤ ਹੈ ਪੀਰੀਅਡਜ਼ $\oint\frac{dz}{\sqrt{f(z)}}$ ਤਕ, ਜੋ 4–ਸਵੈਲੋਟੇਲ ਦੀ ਹਰ ਇਕੁਏਸ਼ਨ $f=0$ ਲਈ ਬਣਾਂਦੇ ਹਨ ਪਲੇਨ $\mathbb{C}$ ਦੀ ਇਕ ਲੈਟਿਸ, ਦੇਖੋ ਗੂਰਸਾ ਵੌਲੀਉਮ ੨ ਸਫ਼ਾ ੧੨੦। ਤੇ ਐਸ ਤੋਂ ਪਹਲਾਂ ਪੱਣੇ ੧੧੪ ਤੋਂ ਚਲਦੇ ਪੇਜਿਜ਼ ਤੋਂ ਕਿ, ਕਿਸੀ ਈਵਨ n–ਸਵੈਲੋਟੇਲਜ਼ ਦੀ ਇਕੁਏਸ਼ਨ $f=0$ ਦੇ ਸਾਰੇ ਪੀਰੀਅਡ $\oint\frac{dz}{\sqrt{f(z)}}$ ਬਣਾਂਦੇ ਹਨ $\mathbb{C}$ ਦਾ ਜਮਾਂ ਥੱਲੇ ਰੈਂਕ $\leq \frac{n}{2}$ ਦਾ ਸਬਗਰੁਪ।

ਜੇ $n>4$ ਤਾਂ ਪਲੇਨ ਲੈਟਿਸ ਦੀ ਆਸ ਤਾਂ ਨਹੀਂ ਕਰ ਸਕਦੇ ਪਰ, ਵੌਰਮ–ਅਪ ਕੇਸ ਵਾਂਗ, ਯੌਰਦਾਂ ਦੇ ੧੯੭੦ ਦੀ ਤਰੇਤੇ ਦੇ ਪੰਣੇ ੩੯੦ ਵਾਲੀ ਥੀਓਰਮ ਕਹਿ ਰਹੀ ਹੈ ਸ਼ਾਇਦ ਕਿ $f=0$ ਦੇ ਇਹ ਪੀਰੀਅਡ ਬਣਾਂਦੇ ਹਨ ਓਹੀ $\tilde{\mathbb{F}}$ ਦੀ ਇਕ ਹੋਰ ਗਾਲਵਾ ਐਸਟੈਨਸ਼ਨ ਜੋ $\tilde{\mathbb{F}}(a_i)$ ਤੋਂ ਥੋੜਾ ਹੀ ਛੋਟੀ ਹੈ, ਤੇ ਜੀਨੀਰਿਕਲੀ ਬਰਾਬਰ ਹੈ? ਸੋ ਓਹੀ ਸਵਾਲ ਉਠਦਾ ਹੈ : ਸਪਸ਼ਟ ਤੋਰ ਤੇ ਕਿ ਹਨ ਫ਼ੌਰਮੂਲੇ ਜੋ ਦਿੰਦੇ ਹਨ ਹਰ ਇਕੁਏਸ਼ਨ ਦੇ ਰੂਟ ਕੌਐਫ਼ੀਸ਼ੈਂਟਸ ਤੇ ਹਇਪਿਰਇਲਿਪਟਿਕ ਪੀਰੀਅਡਸ ਵਿਚ?

ਵਾਪਸ ਟਾਈਲਿੰਗ ਵਲ ਜਾਣ ਲਈ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ ਅਸੀਂ ਸਕਵੇਅਰ ਰੂਟ ਦੀ ਦੌਹਰੀ ਐਮਬਿਗੁਟੀ ਨਾਲ ਸਹੀ ਸਲੂਕ ਕਰੀਏ। ਵੌਰਮ–ਅਪ ਵਨ–ਫ਼ੌਰਮ $\frac{\mathrm{d}z}{f(z)}$ ਦਾ ਤਾਂ $\widehat{\mathbb{C}}\setminus\{a_i\}$ ਸਹੀ ਡੋਮੇਣ ਸੀ, $\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{f(z)}}$ ਦਾ ਨਹੀਂ। ਇਹਨੂੰ ਵੈਲ ਡੀਫ਼ਾਇਣ ਬਣਾਣ ਲਈ ਅਸੀਂ ਰੀਮਾਣ ਵਾਂਗ ਮਾਰਦੇ ਹਾਂ $\frac{n}{2}$ ਡਿਸਜੌਐਂਟ ਕਟ ਰੂਟਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇਆਂ ਚ, ਤੇ ਫ਼ੇਰ ਚੇਪ ਐਸ ਕੱਟੀ ਸਪੇਸ ਨੂੰ ਇਕ ਨੱਕਲ ਨਾਲ ਡੱਬਲ ਕਰ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਮਿਲ ਗਿਆ ਓਹੀ ਕਲੋਜ਼ਡ ਰੀਮਾਣ ਸਰਫ਼ੈਸ M^2 ਤੇ ਜਦੋਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਮਾਰੇ ਕਟਾਂ ਨੂੰ ਇਹਦੇ ਯੂਨੀਵਰਸਲ ਕਵਰ ਤੇ ਮਿਲ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਓਹੀ ਟਾਈਲਿੰਗ।ਪਰ ਟੋਪੌਲੀਜੀ ਤਕ : ਜਮੈਟਰੀ ਵੀ ਐਣ ਟਿੱਚ ਹੋਵੇਗੀ ਓਦੋਂ ਤੇ ਓਦੋਂ ਹੀ ਜਦੋ ਅਸੀਂ ਐਣ ਸਮਝ ਲਵਾਂਗੇ ਫ਼ੌਰਮੂਲੇ ਜਿਹਨਾਂ ਬਾਰੇ ਅਸੀਂ ਸਵਾਲ ਉਠਾਏਆ ਸੀ ਉਤੇ।

ਮੱਮਫ਼ੋਰਡ ਦੀ ਥੀਟਾ II, p.xi ਮੁਤਾਬਕ ਉਮੇਮੂਰਾ ਦੇ ਐਪੈਂਡਿਕਸ ਚ ਨੇ "ਸਰਲ ਫ਼ੋਰਮੁਲੇ" ਇਕੁਏਸ਼ਨਜ਼ ਨੂੰ ਹਲ ਕਰਦੇ, ਜੋ ਓਹਨੇ ਯੌਰਦਾਂ ਦੇ ਇਕ ਤਰੀਕੇ ਨੂੰ ਵਿਕਸਤ ਕਰ ਪਰਾਪਤ ਕਰ ਲੀਤੇ ਹਨ। ਸੰਗੀਤ ਵਾਂਗ ਗਣਿਤ ਵੀ ਅੱਲਗ–ਅੱਲਗ ਮੂਡਜ਼ ਵਿਚ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ! ਸੱਚੀਂ, ਜੇ ਪੂਰੇ ਗੇਅਰ ਬਦਲ ਅਸੀਂ ਵੀ ਆਪਣੇ ਆਪ ਨੂੰ ਯੱਕਦਮ ਫ਼ੌਰਮੂਲੇਆਂ ਦੇ ਮੂਡ ਵਿਚ ਪਾ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ, ਤਾਂ ਇਹ ਭੇਆਣਕ ਫ਼ੌਰਮੁਲੇ ਵੀ ਕੁਝ ਚਿਰ ਬਾਦ ਸਰਲ ਲੱਗਣ ਲਗ ਪੈਂਦੇ ਹਨ। ਪਰ ਸਹੀ ਫ਼ਿਟ ਕਰਣਾ ਐਸ ਵੱਖਰੇ ਮੂਡ ਵਿਚ ਕੀਤੇ ਗਣਿਤ ਨੂੰ, ਇਹ ਚਲਦੀ ਟੋਪੋਲੌਜੀਕਲ ਥੀਓਰੀ ਓਫ਼ ਇਕੁਏਸ਼ਨਜ਼ ਵਿਚ, ਹੀ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਸਾਡਾ ਟੀਚਾ।

ਸੋ ਪੂਰੇ ਗੇਅਰ ਨਾਂ ਬਦਲਦਾ ਮੈਂ ਸਿਰਫ਼ ਇਕ ਸੰਖੇਪ ਸਮੀਖੇਆ ਹੀ ਦੇਵਾਂਗਾ ਉਪਰੋਕਤ ਬੁਕਾਂ ਵਰਤਦਾ। ਕਹਾਣੀ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋਈ ਸੀ ਕੀਉਬਿਕਸ ਲਈ ਵੀਏਟਾ ਦੇ ਟਰਿਗਨੋਮੈਟਰਿਕ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ – ਦੇਖੋ ਨੋਟ ੧੩, ੧੪ – ਜਿਸ ਨੂੰ ਹੀ ਯਾਦ ਕਰਦਾ ਹੈ ਯੌਰਦਾਂ ਦੀ ੧੯੭੦ ਦੀ ਤਰੇਤੇ ਦਾ ਨੋਟ ੫੦੫:– ਟਰਾਂਸਲੇਟ ਕਰਕੇ ਵੇਰੀਏਬਲ ਬਣਾਓ ਦੂਜਾ ਕੋਐਫ਼ੀਸ਼ੈਂਟ--ਰੂਟਾਂ ਦਾ ਜੋੜ--ਜ਼ੀਰੋ। ਜੇ ਐਸ ਦਾ ਤੀਜਾ ਕੋਐਫ਼ੀਸ਼ੈਟ--ਦੋ ਦੋ ਰੂਟਾਂ ਦੀਆਂ ਜ਼ਰਬਾਂ ਦਾ ਜੋੜ--ਜ਼ੀਰੋ ਨਹੀਂ, ਸਕੇਲ ਕਰਕੇ ਵੇਰੀਏਬਲ ਹੁਣ ਬਣਾਓ ਕਿਉਬਿਕ $4z^3-3z+a=0$। ਸਰਕੁਲਰ ਆਰਕ ਦੇ ਤਿਣ ਬਰਾਬਰ ਹਿਸੇ ਬਣਾਣ ਨਾਲ ਜੁੜੀ ਹੈ ਜੋ, ਹੋਰ ਸਾਫ਼ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿਚ, ਜੇ ਅਸੀਂ ਪੁਟ ਕਰਦੇ ਹਾਂ $a=\sin u$, ਤਾਂ ਰੂਟ ਹਨ $z=\sin\frac{u}{3},\sin\frac{u+2\pi}{3},\sin\frac{u+4\pi}{3}$। $\square$

ਟਿੱਪਣੀਆਂ : (ੳ) ਟਰਾਂਸਲੇਸ਼ਨ ਐਸੀ ਜੋ ਕੀਸੀ ਹੋਰ ਕੋਐਫ਼ੀਸ਼ੈਂਟ ਨੂੰ ਜ਼ੀਰੋ ਬਣਾਏ ਮਹਿਣਤ ਮੰਗਦੀ ਹੈ, ਕੌਨਸਟੈਂਟ ਜ਼ੀਰੋ ਬਣਾਣ ਲਈ ਤਾਂ ਇਕੁਏਸ਼ਨ ਦਾ ਹੀ ਇਕ ਰੂਟ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ। (ਅ) ਸਕੇਲਿੰਗ ਨਾਲ ਤੀਜਾ ਕੋਐਫ਼ੀਸ਼ੈਂਟ ਐਡਜਸਟ ਕਰਣ ਲਈ ਅਸੀਂ ਕੱਢਦੇ ਹਾਂ ਇਕ ਸਕਵੇਅਰ ਰੂਟ, ਜੇ ਚੌਥਾ ਐਡਜਸਟ ਕਰਣਾ ਹੁੰਦਾ ਤਾਂ ਕੱਢਦੇ ਇਕ ਕੀਉਬ ਰੂਟ, ਵਗੈਰਾ। (ੲ) ਪੋਜ਼ੀਟਿਵ ਸਕਵੇਅਰ ਰੂਟ ਨਾਲ ਸਕੇਲਿੰਗ ਹੈ ਖਯਾਮ ਦੇ ਮੋਰਪੰਖ ਦੀ ਰੈਟਰੈਕਸ਼ਨ ਸੈਗਮੈਂਟ $(4z^3-3z+1=0, 4z^3-3z-1=0)$ ਉੱਤੇ, ਜਿਸ ਦੇ ਬਾਂਉਂਡਰੀ ਪੌਐਂਟਸ ਦੇ ਰੂਟ $\{+\frac{1}{2},-1,+\frac{1}{2}\}$ ਤੇ $\{-\frac{1}{2},+1,-\frac{1}{2}\}$ ਵੀ ਦਿੰਦੇ ਹਨ ਇਹੋ ਫ਼ੌਰਮੂਲੇ; ਪਰ ਨਹੀਂ ਦਿੰਦੇ ਇਹ ਤਿਣੋ ਕੱਸਪ $z^3=0$ ਦਾ ਇਕੋ ਰੂਟ 0। (ਸ) ਪਰ ਤਰੀਕਾ ਪੂਰਾ ਹਰ ਕੀਉਬਿਕ ਲਈ ਹੈ: ਜੇ ਟਰਾਂਸਲੇਸ਼ਨ ਉਪਰੰਤ ਤੀਜਾ ਕੋਐਫ਼ੀਸ਼ੈਂਟ ਵੀ ਜ਼ੀਰੋ ਹੈ – ਇਹ ਨਹੀਂ ਵਾਪੱਰਦਾ ਮੋਰਪੰਖ ਤੇ, ਪਰ ਵੀਚਾਰੋ ਮਸਲਨ $z^3+a=0$ – ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਕੀਉਬ ਰੂਟ ਜੋ ਤਿਣੋ ਕੌਮਪਲੈਕਸ ਹੋ ਸਕਦੇ ਨੇ; ਅਤੇ ਜੇ ਨਹੀਂ, ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਇਸਤਮਾਲ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕੌਮਪਲੈਕਸ ਸਾਇਣ। (ਹ) ਮਤਲਬ ਪੀਰੀਓਡਿਕ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨ $z(u)$ ਜੋ ਉਲਟਾਂਦੀ ਹੈ ਮਲਟੀਵੈਲਯੁਡ 'ਫ਼ੰਕਸ਼ਨ' $u(z)=\int_0^z\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$:– ਨੋਟ $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\sqrt{dx^2+dy^2}$ ਜੇ

$y=\sqrt{1-x^2}$, ਸੋ 0 ਤੋਂ $x\in(-1,+1)$ ਤਕ ਐਸ ਦੀ ਰੀਅਲ ਇਨਟੀਗਰੇਸ਼ਨ ਦਿੰਦੀ ਹੈ ਯੁਨਿਟ ਸਰਕੁਲਰ ਆਰਕ $u\in(-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2})$ ਸੱਚ ਦੈਟ $\sin u=x$। ਪੂਰਾ ਡੋਮੇਣ $\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ ਦਾ ਹੈ M^2 ਜੋ ਅਸੀਂ ਬਣਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਮਸਲਣ ਪਲੇਣ ਨੂੰ ਕੈਂਚੀ ਨਾਲ $(-1,+1)$ ਤੇ ਕਟਣ ਉਪਰੰਤ, ਗੂੰਦ ਨਾਲ ਇਕ ਨਕਲ ਦੇ ਐਸ ਕੱਟ ਨਾਲ ਚਿਪਕਾ ਕੇ। ਬੇਸ ਪੌਐਂਟ, ਪਹਲੀ ਸ਼ੀਟ ਦੇ 0, ਤੋਂ ਚਲ ਤੇ (ਫਿਲਹਾਲ) ± 1 ਨੂੰ ਛੱਡ ਕਿਸੀ ਵੀ M^2 ਦੇ ਪਾਥ ਉੱਤੇ ਇਨਟੈਗਰੇਟ ਕਰ ਐਸ 1-ਫੌਰਮ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਕੱਢਦੇ ਹਾਂ ਕੀਮਤਾਂ $u(z)$। ਪਰ ± 1 ਨੂੰ ਛੱਡ ਦੀਆਂ ਇਹ ਸਿਲੈਂਡਰ M^2 ਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਟਰਿਵੀਅਲ ਲੂਪਸ ਉੱਤੇ $\oint\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=0$। ਕਿਉਂਕਿ ਐਸੀ -1 ਗਿਰਦ ਇਕ ਵਾਰ ਘੁਮਦੀ ਕਿਸੀ ਵੀ M^2 ਦੀ ਲੂਪ ਦੀ ਜਗਹਾ ਅਸੀਂ ਲੈ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਲੂਪ ਜੋ ਓਹੀ ਛੋਟੇ ਚੱਕਰ ਤੇ ਪਹਲੀ ਤੇ ਫ਼ੇਰ ਦੁਈ ਸ਼ੀਟ ਤੇ ਚਲ ਬੱਣਦੀ ਹੈ। ਸੋ ਬੰਦਿਸ਼ ਕਿ ਪਾਥ ± 1 ਚੋਂ ਨਾਂ ਜਾਵੇ ਫ਼ਜ਼ੂਲ ਹੈ, ਮਸਲਣ, M^2 ਦੀ ਨੌਨ-ਟਰਿਵੀਅਲ ਲੂਪ ਜੋ ਕੱਟ ਤੇ ਪਹਲੀ ਸ਼ੀਟ ਵਿਚ -1 ਤੋਂ $+1$ ਤੇ ਫ਼ੇਰ ਦੂਜੀ ਵਿਚ ਵਾਪਸ $+1$ ਤੋਂ -1 ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਉੱਤੇ $\oint\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=2\pi$, ਯੁਨਿਟ ਸਰਕੁਲਰ ਘੇਰਾ। ਸੋ ਕਿਸੀ ਵੀ ਲੂਪ ਉੱਤੇ ਇਨਟੈਗਰਲ ਹੈ 2π ਜ਼ਰਬੇ ਇਕ ਇਨਟੀਜਰ, ਮਤਲਬ, ਇਨਵਰਸ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨ $\sin:\mathbb{C}\to M^2$ ਲਪੇਟ ਦਿੰਦੀ ਹੈ ਪਲੇਨ ਨੂੰ ਇਹ ਸਲੈਂਡਰ ਗਿਰਦ ਪੀਰੀਅਡ 2π ਨਾਲ। □ (ਕ) ਪੂਰੇ ਵੀਏਟਾ ਦੇ ਤਰੀਕੇ ਨੂੰ ਇਕੋ ''ਸਰਲ ਫ਼ੋਰਮੂਲੇ'' ਵਿਚ ਲਪੇਟ ਐਨੇਲੀਟਿਕ ਐਕਸਟੈਨਸ਼ਨ ਜ਼ਰੀਏ ਅਸੀਂ ਹੁਣ ਚੈਕ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਹੈ ਕਿ ਇਨਪੁਟ ਕੋਈ ਕੀਉਬਿਕ ਇਕੁਏਸ਼ਨ $\odot\in\mathbb{C}P^3$ ਦੇ ਪਿਛੇ ਐਸ ਦੀ ਆਉਟਪੁਟ ਹੋਏਗੀ $\odot$ ਦੇ (ਇਕ, ਦੋ, ਯਾਂ ਤਿਣ ਕੌਮਪਲੈਕਸ) ਰੂਟ। (ਖ) ਐਸੇ ਫ਼ੌਰਮੂਲੇ ਉਸਾਰਣ ਦਾ ਸਾਡਾ ਇਰਾਦਾ ਨਹੀਂ, ਦਿਲਚੱਸਪ ਇਹ ਹੈ ਕੀ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋ ਗਿਆ ਹੈ $u=\int^z\frac{dz}{\sqrt{f(z)}}$ ਨੂੰ ਉਲਟਾਣ ਦਾ ਕਮ, ਪਰ ਲਗਾ ਕੁਝ ਚਾਲਾਂ, ਦਿੱਤੀ ਕਿਉਬਿਕ ਦੀ ਜਗਹਿ ਇਕ ਕਵਾਡਰੇਟਿਕ ਸਕਵੇਅਰ ਰੂਟ ਦੀ ਹੀ ਹੋ ਰਹੀ ਹੈ ਅਜੇ ਗਲ।

ਕਵਾਡਰੇਟਿਕ ਇਕੁਏਸ਼ਨਜ਼ ਲਈ ਵਰਗ ਪੂਰਤੀ (ਡਿਸਕਰੀਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਸਕਵੇਅਰ ਰੂਟ) ਹੀ ਕਾਫ਼ੀ ਹੈ, ਤੇ ਨਾਂ ਹੀ ਰੂਟਾਂ ਬਾਰੇ ਕੁਝ ਦੱਸਦੇ ਹਨ ਪੀਰੀਅਡ $\oint\frac{dz}{\sqrt{z^2+az+b}}=2\pi im, m\in\mathbb{Z}$:- ਸਦਕੇ ਐਨੇਲੀਟਿਕ ਐਕਸਟੈਨਸ਼ਨ ਕਾਫ਼ੀ ਹੈ ਚੈਕ ਕਰਣਾ ਜਦ ਰੂਟ ਹਨ ਦੋ ਰੀਅਲ ਨੰਬਰ, ਸੋ ਗਲ ਉੱਤਰ ਆਂਦੀ ਹੈ ਚੈਕ ਕਰਣ ਤੇ ਕਿ ਸਦਾ $\int_{-r}^{+r}\frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}}=\pi$, ਜੋ ਸਹੀ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਰੈਡੀਅਸ r ਦੇ ਅੱਧ-ਸਰਕਲ $y=\sqrt{r^2-x^2}$ ਦਾ ਆਰਕ-ਐਲੀਮੈਨਟ $\sqrt{dx^2+dy^2}=dx\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}=\frac{rdx}{\sqrt{r^2-x^2}}$। □ (ਗ) ਪਰ $\frac{dz}{\sqrt{z^2+az+b}}$ ਦਾ ਡੋਮੇਣ M^2 ਜ਼ਰੂਰ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦਾ ਹੈ $z^2+az+b=0$ ਦੇ ਰੂਟਸ $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ ਤੇ, ਬਣਾਨ ਲਈ ਜਿਸ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਫ਼ੇਰ ਮੱਣ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਸੈਗਮੈਂਟ $\alpha\beta$ ਨੂੰ ਕਟ ਜਿਸ ਤੇ ਚਿਪਕੀ ਹੋਈਆਂ ਹਨ ਪਲੇਨ ਦਿਆਂ ਦੋ ਨਕਲਾਂ। ਨਾਂ ਸਿਰਫ਼ ਇਹ ਟੋਪੋਲੋਜਿਕਲੀ ਹਮੇਸਾਂ ਸਲੈਂਡਰ ਹੈ, ਅਸੀਂ ਚੈਕ ਕਰ ਲਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ, M^2 ਦੇ ਐਸ 1-ਫ਼ੋਰਮ ਦੇ ਲੂਪ ਇਨਟੈਗਰਲਜ਼ ਦੀਆਂ ਕੀਮਤਾਂ ਹਨ $2\pi i$ ਜ਼ਰਬੇ ਇਨਟੀਜਰਜ਼। (ਘ) ਇਹ ਡਿਗਰੀ$(f)=2$ ਕੇਸ ਵਿਚ 1-ਫ਼ੋਰਮ ਇਨਫ਼ਿਨੇਟੀ ਤੇ ਫ਼ੱਟ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਤਾਂਹੀ ਇਹ ਡੋਮੇਣ ਕੌਮਪੈਕਟ ਨਹੀਂ, ਪਰ ਹਨ ਸੱਭ ਪੌਐਂਟ ਬਰਾਬਰ ਤੇ ਸਮੂਦ, ਤੇ ਕਿਸੀ ਵੀ ਬੇਸ ਪੌਐਂਟ $0\in M^2$ ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਹੁੰਦੇ ਸਾਰੇ ਪਾਥ ਇਨਟੈਗਰਲਜ਼ $u(z)=\int_0^z\frac{dz}{\sqrt{z^2+az+b}}$ ਨੂੰ ਉਲਟਾ ਮਿਲ ਦੀ ਹੈ $\mathbb{C}$ ਦੀ M^2 ਉੱਤੇ ਇਕ ਹੋਲੋਮੋਰਫ਼ਿਕ ਸਰਜੈਕਸ਼ਨ $z(u)$ ਸੱਚ ਦੈਟ $z(u+2\pi i)=z(u)$ ਅਤੇ $z(0)=0$। (ਙ) ਵਿਚਾਰੋ ਇਕੋ $\mathbb{C}$ ਦੀ ਨਕਲ ਵਿਚ ਰਹੰਦੇ ਯਾਣੀ ਕੱਟ $\alpha\beta$ ਚੋਂ ਨਾਂ ਲੰਘਦੇ ਲੂਪਸ ਤੇ ਇਣਟੈਗਰਲ ਜਦ $\beta\to\alpha$, ਤਾਂ ਬਣ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਇਹ ਕੋਸ਼ੀ ਦਾ ਮਸ਼ਹੂਰ ਫ਼ੌਰਮੂਲਾ $\oint\frac{dz}{z-\alpha}=2\pi im, m\in\mathbb{Z}$। (ਚ) ਕੱਟਾਂ ਤੋਂ ਬਣੀ M^2 ਦੀ ਲੂਪ $\alpha\beta\alpha$ ਦਾ ਪੁਲ-ਬੈਕ ਹੈ $\mathbb{C}$ ਦੀ ਇਕ ਰੇਖਾ ਜਿਸ ਤੇ α ਤੇ β ਦੇ ਪਰੀ-ਇਮੇਜ ਬਾਰੀ-ਬਾਰੀ ਦੂਰੀ π ਤੇ ਹਨ, ਭਾਵ, ਇਹ ਦੋ-ਰੂਟੀ ਕੇਸ ਵਿਚ ਬੀਜ ਟਾਇਲ ਹੈ 1-ਸਿਮਪਲੈਕਸ $\alpha_0\beta_0$ ਤੇ ਰੇਖਾ ਹੀ ਬਣਦੀ ਹੈ ਓਹਦੇ ਫ਼ੇਸੈਟਸ ਚ ਲਾਇਣ ਦੇ ਦੋ ਰੈਫ਼ਲਕਸ਼ਨਜ਼ ਦੀ ਬਾਰ-ਬਾਰ ਵਰਤੋਂ ਨਾਲ। (ਛ) ਪਰ-ਨੋਟ (੫੦.੦੨)-

ਦੋ ਹਾਫ਼-ਟਰਨਜ਼ ਜਿਹਨਾਂ ਦਿਆਂ ਰਿਸਟਰਿਕਸ਼ਨਜ਼ ਹਨ ਇਹ ਰੈਫ਼ਲੈਕਸ਼ਜ਼, ਦੇ ਈਵਣ ਕੌਮਪੋਜ਼ੀਸ਼ਨਜ਼ ਨਾਲ ਤਕਸੀਮ ਹੈ ਯੁਨੀਵਰਸਲ ਕਵਰਿੰਗ $\mathbb{C}\to M^2$, ਤੇ ਪੂਰੇ ਗਰੁਪ ਨਾਲ ਦਿੰਦੀ ਹੈ ਅੱਗੇ α ਤੇ β ਉੱਤੇ ਬਰਾਂਚੱਡ ਇਕ ਦੂਹਰੀ ਕਵਰਿੰਗ $M^2\to\mathbb{C}$:- ਟਾਇਲ $\alpha_0\beta_0$ ਦੇ ਸਿਰੇਆਂ ਚੋਂ ਲੰਘਦੀਆਂ ਕੋਈ ਦੋ ਪੈਰੈਲਲ ਰੇਖਾਂਵਾ ਵਿਚ ਹੈ ਗਰੁਪ ਦਾ ਇਕ ਫ਼ੰਡਾਮੈਂਟਲ 2-ਸੈਲ, ਤੇ ਰੈਖਾਂਵਾਂ ਫ਼ੋਲਡ ਜੋ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ α_0 ਤੇ β_0 ਉਤੇ, ਸੋ ਕੌਸ਼ੈਂਟ ਦਾ ਓਅਲਰ ਨੰਬਰ ਹੈ $2-2+1=1$, ਵਗੈਰਾ। □ (ਜ) ਪੂਰਾ ਮੈਪ $\mathbb{C}\to M^2\to\mathbb{C}$ ਹੈ 'ਜੈਨੇਰਲਆਇਜ਼ਡ ਸਾਇਨ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨ' $z(u)$ ਦਾ ਸਕਵੇਅਰ:- ਪਹਿਲੇ ਮੈਪ ਦੇ ਇਹ ਇਮੇਜ $z(u)$ ਹਨ

ਪੌਐਂਟ $(z, \pm\sqrt{z^2+az+b})$ ਦੋ ਸ਼ੀਟਾਂ ਵਾਲੇ ਰੀਮਾਣ ਗਰਾਫ਼ M^2 ਦੇ, ਅੱਤੇ $z^2(u)$ ਹਨ $\mathbb{C}$ ਉੱਤੇ ਇਕ ਸਿੰਗਲ ਵੈਲੀਉਡ ਗਰਾਫ਼ ਦੇ ਪੌਐਂਟ (z, z^2+az+b)। $\square$ (ੜ) ਕਿਹੜੀ ਸ਼ੀਟ ਚ ਕਿਹੜੇ ਰੂਟ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਚਲਦੇ ਹਾਂ ਤੇ ਹੀ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦੇ ਹਨ ਸੈਗਮੈਂਟਸ ਤੇ ਇਨਟੀਗਰਲ

$\int_{\alpha\beta}\frac{dz}{\sqrt{z^2+az+b}} = \pm\pi i$:- ਓਹੀ $\int_{-r}^{+r}\frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}} \equiv \pi$ ਤੇ ਐਨੇਲੀਟਿਕ ਐਕਸਟੈਨਸ਼ਨ ਦਸਦੀ ਹੈ ਇਨਟੀਗਰਲ ਕੌਨਸਟੈਂਟ ਹੇ ਐਫ਼ਾਇਨ 2-ਸਵੈਲੋਟੇਲ $\mathbb{C}\Omega^2$ ਉੱਤੇ, ਮਸਲਨ, ਜੇ ਅਸੀਂ ਗੇੜੀ ਮਾਰ ਵਾਪਸ ਕੋਈ ਇਕੁਸ਼ਨ $\odot$ ਆਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਰੂਟਾਂ $\{\alpha, \beta\}$ ਦੀ ਅਦਲਾ-ਬਦਲੀ, ਤੇ ਨਾਲ ਹੀ ਇਨਟੈਗਰੈਂਡ ਚ ਸਕਵੈਅਰ ਰੂਟ--ਜੋ ਅੱਧੀ ਸਪੀਡੇ ਘੁਮਦਾ ਹੈ--ਬਦਲ ਲੈਂਦਾ ਹੈ ਸਾਇਨ। $\square$ (ਵ੍ਹ) ਲਾਇਣ $\mathbb{R}$ ਚ ਕੈਦ ਸਦਾ ਵਖਰੇ n ਪਾਰਟੀਕਲਜ਼ ਦਾ ਓਰਡਰ ਓਹੀ ਰਹਿੰਦਾ ਹੇ, ਸੋ ਰੀਅਲ n-ਸਵੈਲੋਟੈਲ $\mathbb{R}\Omega^n$ ।-ਓਪੈਣ n-ਸੈਲ ਹੈ, ਤੇ ਐਸ ਉਤੇ ਤਾਂ ਰੂਟਾਂ ਦੇ ਗਰਾਫ਼ G ਦਿਆਂ n ਸ਼ੀਟਸ ਡਿਸਜੌਐਂਟ ਹਨ। ਪਰ ਪਲੇਣ $\mathbb{C}$ ਦੀ ਖੁਲ ਵਿਚ ਸਾਰੀਆਂ $n!$ ਪਰਮੂਟੈਸ਼ਨਜ਼ ਸੰਭਵ ਹਨ, ਸੋ $\mathbb{C}\Omega^n$ ਉੱਤੇ ਨਾਂ ਸਿਰਫ਼ G ਕੋਨੈਕਟਿਡ ਹੈ ਓਹਦੀਆਂ ਕਵਰਿੰਗ ਟਰਾਂਸਫ਼ੌਰਮੈਸ਼ਨਜ਼ ਦੇ ਗਰੂਪ ਦਾ ਓਰਡਰ ਹੈ ਪੂਰਾ $n!$ ਅੱਤੇ ਐਸ ਉੱਤੇ ਸਰਜੈਕਟ ਕਰਦਾ ਹੈ ਕੌਮਪਲੈਕਸ ਐਫ਼ਾਇਣ n-ਸਵੈਲੋਟੇਲ $\mathbb{C}\Omega^n$ ਦਾ ਫ਼ੰਡਾਮੈਂਟਲ ਗਰੂਪ। $\square$ (ਟ) $\mathbb{C}\Omega^n$ ਦੇ ਕੀਸੀ ਪਾਥ ਨੂੰ ਜੇ ਅਸੀਂ $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ ਵਿਚ ਤੱਕਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਪਾਰਟੀਕਲਜ਼ ਬੁਣਦੇ ਦਿਖਦੇ ਹਨ n ਲੱਟਾਂ ਦੀ ਗੁਤ, ਇਹ ਫ਼ੰਡਾਮੈਂਟਲ ਗਰੂਪ ਹੈ ਆਰਟਿਣ ਦਾ nਥ ਬਰੇਡ ਗਰੂਪ, ਸੋ ਕਵਰਿੰਗ ਸਪੈਸ G ਉੱਤੇ ਇਹਦਾ ਐਕਸ਼ਨ ਯਾਂ ਮੋਨੋਡਰੋਮੀ ਜਮਦੀ ਹੈ ਗਾਲਵਾ ਦਾ ਗਰੂਪ ਜੀਨੀਰਿਕ ਡਿਗਰੀ n ਇਕੁਏਸ਼ਨ ਦਾ। $\square$ (ਠ) ਚੱਲਦੇ $n=2$ ਕੇਸ

ਕਵਾਡਰੇਟਿਕ ਇਕੁਏਸ਼ਨਜ਼ ਦੀ ਟੋਪੋਲੋਜੀ ਹੀ ਅੱਤ ਰੋਚੱਕ ਹੈ! ਗਰਾਫ਼ G ਹੈ ਹੁਣ ਡੀਲੀਟਿਡ ਸਕਵੇਅਰ $\mathbb{C}^2$ ਮਨਫ਼ੀ ਡਾਏਗਕਲ, ਸਾਰੇ ਵਖਰੇ ਓਰਡਰਡ ਜੋੜੇ (α, β), ਸਾਰੇ ਅਨਓਰਡਰਡ $\{\alpha, \beta\}$ ਹਨ $\mathbb{C}\Omega^2$, ਦੋਨੋਂ ਸਪੇਸ ਟੋਪੋਲੋਜਿਕਲੀ $(\mathbb{C}\backslash 0) \times \mathbb{C} \simeq S^1$ ਹਨ, ਤੇ ਕਵਰਿੰਗ ਮੈਪ $(\alpha, \beta) \mapsto \{\alpha, \beta\}$ $\mathbb{Z}_2$-ਹੋਮੋਟੋਪੀ ਟਾਇਪ ਤਕ S^1 ਦਾ ਐਂਟੀਪੋਡਲ ਸੋ ਸਕਵੇਅਰਿੰਗ ਮੈਪ ਹੈ। $\square$ (ਡ) ਹੋਮੋਜੀਨਸ ਕਵਾਡਰੇਟਿਕ ਰੀਅਲ ਇਕੁਏਸ਼ਨਾਂ ਦੀ ਸਵੈਲੋਟੇਲ $\mathbb{R}P\Omega^2$ ਹੈ ਓਪੈਣ ਮੌਬੀਅਸ ਸਟਰਿਪ:- ਓਹੀ ਮੋਬੀਅਸ ਦੀ ਇਨਵਰਸ਼ਨ ਬਾਦ $\widehat{\mathbb{R}}$ ਦੀ ਜਗਹਾ S^1 ਤੇ ਐਂਟੀਪੋਡਲ ਰੂਟ ਅੱਧ-ਘੁਮ, ਤੇ ਬਾਕੀ ਪੂਰਾ ਘੁਮ, ਵਾਪਸ ਮੁੜ ਜੋ ਆਂਦੇ ਨੇ (ਐਂਵੇ ਹੀ $\mathbb{R}P\Omega^n$ ਦੀ ਟੋਪੋਲੋਜੀ ਵਗੈਰਾ, ਪਰ ਬਾਕੀ ਹੈ ਅਜੇ ਸੀਕਲਿਕ ਯਾਂ S^1-ਹੋਮੋਲੋਜੀ)। $\square$ (ਢ) ਕਲੋਯਰ ਸਟਰਿਪ ਦਾ ਕਿਤੇ ਛੋਟਾ ਹੈ ਸਾਰੀਆਂ ਹੋਮੋਜੀਨਸ ਰੀਅਲ ਕਵਾਡਰੇਟਿਕਸ $\mathbb{R}P^2$ ਤੋਂ ਪਰ ਜਾਦੂਈ ਹੈ ਕਿ 2-ਸੈਲ $\mathbb{R}\Omega^2$ ਦਿਆਂ ਇਕੁਏਸ਼ਨਾਂ ਵਾਲਾ ਸਕੂਲੀ ਫ਼ੋਰਮੂਲਾ ਹਰ $\odot \in \mathbb{C}P^2$ ਨੂੰ ਹਲ ਕਰਦੈ (ਤੇ ਇਹੋ ਮੋਬੀਅਸ ਰੀਜੀਡਿਟੀ ਯਾਂ ਐਨੇਲੈਟਿਕ ਐਕਸਟੈਨਸ਼ਨ ਦੇ ਜਾਦੂ ਕਾਰਣ ਕਾਫ਼ੀ ਹੈ ਹਲ ਕਰਣਾ $\mathbb{R}\Omega^n \subset \mathbb{C}P^n$ ਦਿਆਂ ਇਕੁਏਸ਼ਨਜ਼, ਜੋ ਅਸੀਂ ਜਮੈਟਰੀ ਪੱਖੋਂ ਤਾਂ ਤਕਰੀਬਣ ਕਰ ਚੁਕੇ ਹਾਂ ਹਰ $n > 2$ ਲਈ ਓਹ n-ਹਾਫ਼ ਟਰਨਜ਼ ਵਾਲੀਆਂ ਟਾਈਲਾਂ ਨਾਲ ਬੰਧੇ ਮੈਰੋਮੌਰਫ਼ਕ ਕੋਸ਼ੈਂਟਸ ਦੇ ਪੀਰੀਅਡਜ਼ ਨਾਲ, ਪਰ ਬਾਕੀ ਹੈ ਕੁਝ ਕਸਰ ਤੇ ਰਿਸ਼ਤਾ ਮੱਮਫ਼ੋਰਡ ਆਦਿ ਦੇ ਫ਼ੌਰਮੁਲੇਆਂ ਨਾਲ)। $\square$ (ਣ) ਹੋਮੋਜੀਨਸ ਕਵਾਡਰੇਟਿਕ ਕੌਮਪਲੈਕਸ ਇਕੁਏਸ਼ਨਾਂ ਦੀ ਸਵੈਲੋਟੇਲ $\mathbb{C}P\Omega^2$ ਹੈ $\cong \mathbb{R}P^2$ ਦਾ ਟੈਂਜੈਂਟ ਬੰਡਲ:- ਇਕ $\widehat{\mathbb{R}^3}$ ਦੀ ਮੋਬੀਅਸ ਇਨਵਰਸ਼ਨ ਬਾਦ ਰੂਟ $\widehat{\mathbb{C}}$ ਦੀ ਜਗਹਾ ਇਕ ਗੋਲ S^2 ਦੇ ਜੋੜੇ ਬਣ ਜਾਂਦੇ ਹਨ, ਸਾਰੇ ਐਂਟੀਪੋਡਲ ਬਣਾਂਦੇ ਹਨ $\mathbb{R}P^2$ ਤੇ ਫ਼ਿਕਸਡ ਰਹਿੰਦੇ ਹਨ ਫ਼ਾਇਬਰ ਮੈਪ ਥੱਲੇ, ਜੋ ਕਿਸੀ ਹੋਰ ਵਖਰੇ ਜੋੜੇ $\{\alpha, \beta\}$ ਨੂੰ ਮੈਪ ਕਰਦੈ ਓਸ $\pm\gamma$ ਤੇ ਜੋ ਓਹਨਾਂ ਚੋਂ ਲੰਘਦੇ ਇਕਲੋਤੇ ਗਰੇਟ ਸਰਕਲ ਤੇ ਮਿਡ-ਪੌਐਂਟ δ ਦੇ ਨੌਰਮਲ ਹੈ। $\square$ ਸੋ $\mathbb{C}P\Omega^2 \simeq \mathbb{R}P^2$ ਗੋਲ S^2 ਉੱਤੇ ਸਾਰੇ ਰੀਪੈਲਿੰਗ ਜੋੜੇਆਂ ਦੀ ਸਟੇਬਲ ਸਬਸਪੈਸ (ਪਰ ਬਾਕੀ ਹੈ n ਰੀਪੈਲਿੰਗ ਪਾਰਟੀਕਲਜ਼ ਲਈ $\mathbb{C}P\Omega^n$ ਦਾ ਇਹੋ ਕੌਮਪੈਕਟ ਡੀਫ਼ੌਰਮੈਸ਼ਨ ਰੀਟਰੈਕਟ)। (ਤ) ਸਾਡੀਆਂ ਸਵੈਲੋਟੇਲਜ਼ ਤੇ ਥੋਮ ਦਿਆਂ ਕੌਮਪਲੀਮੈਂਟਰੀ ਹਨ, ਇਹ ਹਨ ਸਾਰੇ $\odot$ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਰੂਟ ਘੱਟ ਹਨ ਭਾਵ ਡਿਸਕਰੀਮੀਨੈਂਟ $= 0$: $\mathbb{C}P\Omega^2$ ਹੈ $\mathbb{C}P^2$ ਮਨਫ਼ੀ ਕਵਾਡਰੇਟਿਕਸ $az^2+bzw+cw^2=0$ ਸੱਚ ਦੈਟ $b^2-4ac=0$ ਜਿਸ ਦਾ ਨੇਬਰਹੁਡ $\mathbb{C}P^2$ ਮਨਫ਼ੀ $\mathbb{R}P^2$ ਹੈ S^2 ਤੇ ਇਕ ਬੰਡਲ:- ਕਵਾਡਰੇਟਿਕ ਜਿਸ ਦੇ ਦੋਨੋ ਰੂਟ ਹਨ $\alpha \in \widehat{\mathbb{C}} \cong S^2$ ਦੇ ਫ਼ਾਈਬਰ ਚ ਹਨ ਲੰਘਦੇ ਸਾਰੇ ਗਰੇਟ ਸਰਕਲ ਮਨਫ਼ੀ $-\alpha$। $\square$ (ਥ) ਜਿਸ ਦਾ $S^2 \times S^2 \to S^2 * S^2 \xrightarrow{\equiv} \mathbb{C}P^2$ ਚ ਪੁਲ-ਬੈਕ ਹੈ $\cong S^2$ ਦਾ ਟੈਂਜੈਂਟ ਬੰਡਲ:- ਸਾਰੇ ਨੌਰਮਲ (α, β) ਜੋ ਬਣਾਂਦੇ ਹਨ ਇਕ $T_1(S^2) \cong \mathbb{R}P^3$ ਜੋ $S^2 \times S^2$ ਚ ਸੇਪੇਰੇਟ ਕਰਦਾ ਇਹਦੇ ਡਾਏਗਨਲ ਤੇ ਸਟੇਬਲ 2-ਸਫ਼ੀਅਰ, ਤੇ ਥੱਲੇ $S^2 * S^2$ ਚ ਇਕ $T_1(\mathbb{R}P^2)$ ਸੈਪੇਰੇਟ ਕਰਦਾ ਹੈ ਡਾਏਗਨਲ S^2 ਨੂੰ ਸਟੇਬਲ $\mathbb{R}P^2$ ਤੋਂ। $\square$ (ਦ) ਪੁਰਾਣੇ ਗਣਿਤ ਦਾ ਸਹੀ ਮੁਲ ਪਾਣਾ ਆਮ ਇਤਿਹਾਸਕਾਰਾਂ ਦੇ ਬੱਸ ਦਾ ਕਮ ਨਹੀਂ, ਆਰਨੌਲਡ ਵਾਂਗ

$S^2 * \cdots * S^2 \xrightarrow{\equiv} \mathbb{C}P^n$ ਨੂੰ ਵੀਏਟਾ ਦੀ ਥੀਓਰਮ ਕਹਿਣ ਚ ਦਮ ਹੈ:- ਜ਼ਰੂਰ ਓਸ ਪੋਰਾਤਣ ਟਾਇਮ

ਮੈਨੀਫ਼ੋਲਡਜ਼ ਤਾਂ ਪਾਸੇ, ਕੌਮਪਲੈਕਸ ਨੰਬਰ ਵੀ ਬਹੋਤ ਦੂਰ ਭਵਿਖ ਵਿਚ ਸਨ, ਪਰ ਕੌਐਫ਼ੀਸ਼ੈਂਟ ਰੂਟਾਂ ਦਿਆਂ ਐਲੀਮੈਂਟਰੀ ਸੀਮਿਟਰਿਕ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨਜ਼ ਹਨ ਦਾ ਪਤਾ ਸੀ ਐਸ ਪੁਰਾਣੇ ਨੂੰ! ਮੰਨਦੇ S^2 ਨੂੰ $\hat{\mathbb{C}}$ ਇਹੋ ਡੈਫ਼ੀਨੇਸ਼ਨ ਹੈ ਸਾਡੇ ਮੈਪ ਦੀ, ਤੇ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੈ ਇਹ ਵਨ-ਵਨ ਤੇ ਕੌਨਟੀਨੁਅਸ ਹੈ ਇਕ ਕਲੋਜ਼ਡ ਸੁਡੋਮੈਨੀਫ਼ੋਲਡ ਤੋਂ ਉਸੀ ਡਾਈਮੈਨਸ਼ਨ ਦੇ ਇਕ ਕੋਨੈਕਟਿਡ ਕਲੋਜ਼ਡ ਮੈਨੀਫ਼ੋਲਡ ਵਿਚ, ਸੋ ਇਹ ਮੈਪ ਓਨਟੂ ਵੀ ਹੈ ਤੇ ਸੁਡੋਮੈਨੀਫ਼ੋਲਡ ਦਰਅੱਸਲ ਮੈਨੀਫ਼ੋਲਡ ਹੈ। □ (ਧ) ਸੀਮਿਟਰਿਕ ਪਾਵਰਜ਼ ਚ ਇਹ ਐਫ਼ ਟੀ ਏ $\mathbb{C}*\cdots*\mathbb{C} \overset{\equiv}{\to} \mathbb{C}^n$ ਅੱਗੇ ਦਸਦੀ ਹੈ n ਵੱਖਰੇ ਰੂਟਾਂ ਦਿਆਂ ਸੀਮਿਟਰਿਕ ਕੌਨਟੀਨੁਅਸ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨਾਂ ਤੇ ਕੋਐਫ਼ੀਸ਼ੈਂਟਸ ਦਿਆਂ ਕੌਨਟੀਨੁਅਸ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨਾਂ ਇਕੋ ਹਨ:- $\mathbb{C}\times\cdots\times C \to \mathbb{C}*\cdots*\mathbb{C}$ ਤੇ ਐਸ ਵੀਏਟਾ ਹੋਮੀਓਮੋਰਫ਼ਿਜ਼ਮ ਦੀ ਕੌਮਪੋਜ਼ੀਸ਼ਨ ਐਕਸਟੈਂਡ ਕਰਦੀ ਹੈ n ਵਖਰੇ ਰੂਟਾਂ ਦੇ ਕਵਰਿੰਗ ਮੈਪ $G \to \mathbb{C}\Omega^n$ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਪਰਿਨਸੀਪਲ $n!$-ਫ਼ੋਲਡ ਕਵਰਿੰਗ ਮੈਪ। □ (ਨ) ਤੇ ਇਹ ਨਤੀਜਾ ਸਹੀ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ ਜੇ 'ਕੌਨਟੀਨੁਅਸ' ਦੀ ਥਾਂ ਹੈ 'ਰੈਸ਼ਨਲ' ਯਾਂ ਫ਼ੇਰ 'ਪੌਲੀਨੋਮੀਅਲ':- ਕਵਰਿੰਗ ਮੈਪ ਕੌਮਲੈਕਸ ਐਨੇਲਿਟਿਕ ਵਗੈਰਾ ਤੋਂ ਇਹ ਨਿਕੱਲਦਾ ਹੈ ਓਵਰ $\mathbb{C}$ ਮਤਲਬ ਸਾਰੇ ਪੌਲੀਨੋਮੀਅਲਜ਼ ਲਈ। ਪਰ ਅੱਗੇ, $\mathbb{C}$ ਦੇ ਕਿਸੀ ਸਬਫ਼ੀਲਡ $\mathbb{F}$ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਸਿਰਫ਼ ਓਹ ਹੀ ਲੈ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜਿਹਣਾ ਦਿਆਂ ਸਾਰੇ $\mathbb{F}$-ਪੌਐਂਟਸ ਤੇ ਕੀਮਤਾਂ ਵੀ $\mathbb{F}$ ਵਿਚ ਹਨ। □ (ਪ) 'ਕੈਲਕੌਂਕ' $\odot \in \mathbb{C}\Omega^n$ ਲਈ ਐਸ ਓਵਰ $\mathbb{Q}$ ਸ਼ੁਧ ਅਲ-ਜੱਬਰਿਕ ਨਤੀਜੇ--ਜੋ ਨੀਉਟਣ ਤੱਕ ਜੰਵਾਂ ਪੱਕਾ ਸੀ--ਦੀ ਯਾਦ ਨਾਲ ਹੀ ਸ਼ੁਰੂ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਯੌਰਦਾਂ ਦੇ "ਤਰੇਤੇ" ਦੀ ਤੀਜੀ ਲੀਵਰ : 'ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਰੂਟਾਂ ਦੀ ਕੋਈ (ਰੈਸ਼ਨਲ) ਸੀਮੀਟਰਿਕ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨ ਕੌਐਫ਼ੀਸ਼ੈਂਟਸ ਦੀ ਰੈਸ਼ਨਲ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨ ਹੈ ...'

(ਫ) ਐਸ ਨੀਉਟਣ ਥੀਓਰਮ ਤੋਂ ਝੱਟ ਡੀਫ਼ਾਇਣ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੇ 'ਸ਼ਾਕ' $\odot \in \mathbb{C}\Omega^n$ ਲਈ ਰੂਟਾਂ ਦਾ ਓਹ ਪਰਮੂਟੇਸ਼ਨ ਗਰੂਪ ਜਿਸ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਹੁਣ ਜੋੜਦੇ ਹਾਂ ਗਾਲਵਾ ਦਾ ਨਾਮ (ਐਬਸਟਰੈਕਟ ਗਰੂਪ ਤੇ ਸ਼ਬਦ ਫ਼ੀਲਡ ਦੂਰ ਭਵਿਖ ਵਿਚ ਹਨ, ਇਹ ਨਹੀਂ ਤਰੇਤੇ ਵਿਚ) := ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟਾ ਸੱਚ ਦੈਟ ਕੌਐਫ਼ੀਸ਼ੈਂਟਸ ਤੇ ਇਹ ਪਰਮੂਟੇਸ਼ਨਜ਼ ਥੱਲੇ ਇਨਵੇਰੀਐਂਟ ਰੂਟਾਂ ਦੀਆਂ ਰੇਸ਼ਨਲ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨਜ਼ ਇਕੋ ਹਨ। □ (ਬ) ਜੰਗਲੀ ਤਾਂ ਹੈ ਪਰ $\odot$ ਦਾ ਗਾਲਵਾ ਗਰੂਪ ਪੂਰੇ ਓਰਡਰ $n!$ ਦਾ ਹੈ $\mathbb{C}\Omega^n$ ਦੇ ਡੈਂਸ ਸਬਸੈਟ ਉੱਤੇ:- ਜਮਾਂ, ਮਨਫ਼ੀ, ਜ਼ਰਬ, ਤਕਸੀਮ ਨਾਲ ਕਾਉਂਟੇਬਲ ਹੀ ਬਣਦੀਆਂ ਹਨ ਰੂਟਾਂ ਦੀਆਂ ਰੈਸ਼ਨਲ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨਜ਼, ਤੇ ਹਰ ਐਸੀ ਨੌਨ-ਸੀਮਿਟਰਿਕ ਇਕ ਕੌਐਫ਼ੀਸ਼ੈਂਟਸ ਦੀ--ਸੋ ਸੀਮਿਟਰਿਕ--ਫ਼ੰਕਸ਼ਨ ਓਦੋਂ ਹੀ ਹੈ ਜਦੋ ਰੂਟਾਂ ਵਿਚ ਹੈ ਅੱਲ-ਜੱਬਰਿਕ ਸੰਮਬੰਧ, ਸੋ ਸਿਰਫ਼ ਇਕ ਕਲੌਜ਼ਡ ਨੋਵੇਯਰ ਡੈਂਸ ਸੈਟ ਤੇ। □ ਡਿਸਜੌਐਂਟ ਨੌਨ-ਐਮਪਟੀ ਸੈਟ ਜਿਥੇ ਗਾਲਵਾ ਗਰੂਪ ਦਾ ਓਰਡਰ ਹੈ $n!$ ਦਾ ਇਕੋ ਡੀਵਾਈਜ਼ਰ, ਕਿ ਇਹ ਸੱਭ $\mathbb{C}\Omega^n$ ਵਿਚ ਨਾਂ ਸਿਰਫ਼ ਡੈਂਸ ਪਰ ਅੱਨ-ਕਾਉਂਟੇਬਲ ਤੇ ਨੌਨ-ਮੈਯੱਰੇਬਲ ਵੀ ਹਨ? (ਭ) ਤਰੇਤੇ ਦਾ 'ਲੈਮ ੩' (ਅਜ ਦੀ ਭਾਸ਼ਾ ਵਿਚ ਕਿ ਸਪਲਿਟਿੰਗ ਫ਼ੀਲਡ ਇਕੋ ਐਲੀਮੈਂਟ ਜੈਨੇਰੇਟ ਕਰ ਸਕਦਾ ਹੈ) : $\odot$ ਦੇ ਰੂਟਾਂ ਦੇ ਇਕੋ ਇਨਟੀਗਰਲ ਕੌਮਬੀਨੇਸ਼ਨ ਤੇ ਕੌਐਫ਼ੀਸ਼ੈਟਸ ਵਿਚ ਰੈਸ਼ਨੱਲੀ ਲੀਖੇ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ ਸਾਰੇ ਰੈਟ:-

"ਲੈਮ ੨ : $F(x)=0$ ਦੇ ਰੂਟਾਂ ਦੇ ਤਕਰੀਬਣ ਸਾਰੇ ਇਹ ਕੌਮਬੀਨੇਸ਼ਨਜ਼ $V_1 = M_1x_1 + M_2x_2 + \cdots$ ਦੀਆਂ ਅਦਲਾ-ਬਦਲੀਆਂ α ਥੱਲੇ $n!$ ਭਿਣ ਕੀਮਤਾਂ V_α ਹਨ।' ਸੋ ਅਗਿਆਤ V ਵਿਚ ਡਿਗਰੀ $(n-1)!$ ਇਕੁਏਸ਼ਨ ਜਿਹਦੇ ਰੂਟ ਹਨ $\{V_\alpha : \alpha(x_1) = x_1\}$ ਇਹ $(n-1)!$ ਪਰਮੁਟੇਸ਼ਨਜ਼ ਥਲੇ ਕਾਇਮ ਹੈ, ਤੇ ਕਿਸੀ ਹੋਰ ਥਲੇ ਬਣ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਜੰਵਾਂ ਵੱਖਰੇ ਰੂਟਾਂ ਵਾਲੀ। ਅੱਗੇ ਐਸ ਦੇ ਕੌਐਫ਼ੀਸ਼ੈਂਟ ਲਿਖੇ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ (ਰੈਸ਼ਨਲੀ) x_1 ਤੇ $x_2, x_3, \ldots$ ਦਿਆਂ ਸਮੀਟਰਿਕ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨਜ਼ ਵਿਚ, ਸੋ x_1 ਤੇ $\frac{F(x)}{x-x_1} = 0$ ਦੇ ਕੌਐਫ਼ੀਸ਼ੈਟਸ ਵਿਚ, ਸੋ x_1 ਤੇ $F(x)=0$ ਦੇ ਕੌਐਫ਼ੀਸ਼ੈਟਸ ਵਿਚ। ਐਸ ਰੈਸ਼ਨਲ ਆਈਡੈਂਟੀਟੀ $f(V, x_1) = 0$ ਨੂੰ ਹੁਣ ਪੜੋ $f(V_1, x) = 0$ ਵਿਦ x ਅੱਗਿਆਤ। ਇਕੋ ਰੂਟ, x_1, ਸਾਂਝਾ ਹੈ ਇਹਦਾ ਤੇ $F(x)=0$ ਦਾ। ਮਤਲਬ $x - x_1$ ਏਚ ਸੀ ਐਫ਼ ਹੈ ਇਹਣਾ ਦਾ। ਜੋ ਅਸੀਂ ਯੁਕਲਿਡ ਦੇ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਕੱਡ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਸੋ x_1 ਨੂੰ V_1 ਤੇ $F(x)=0$ ਦੇ ਕੌਐਫ਼ੀਸ਼ੈਂਟਾਂ ਵਿਚ ਰੈਸ਼ਨਲੀ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।'□ (ਮ) ਕਿਸੀ ਵੀ ਰੂਟਾਂ ਦੀ ਰੈਸ਼ਨਲ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨ V_1, ਤੇ $\odot \in \mathbb{C}\Omega^n$ ਜਿਸ ਤੇ ਹਨ ਐਸ ਦਿਆਂ ਇਹ $n!$ ਵੱਖਰੀਆਂ ਕੀਮਤਾਂ V_α, ਲਈ ਸਹੀ ਹੈ 'ਤੇਓਰੱਮ ਫ਼ੌਂਦਾਮੌਂਤਾਲ' : ਡਿਗਰੀ $n!$ ਗਾਲਵਾ ਦੀ ਇਕੁਏਸ਼ਨ $\prod_\alpha (V - V_\alpha) = 0$ ਦੀ $\odot$ ਤੇ ਫ਼ੈਕਟਰਆਈਜ਼ੇਸ਼ਨ ਦਿੰਦੀ ਹੈ ਗਾਲਵਾ ਗਰੂਪ ਦੇ ਸਾਰੇ ਓਰਬਿਟ:-

'ਕੋਐਫ਼ੀਸ਼ੈਂਟ ਐਸ ਇਕੁਏਸ਼ਨ ਦੇ ਸੀਮਿਟਰਿਕ ਹਨ, ਸੋ $\odot$ ਤੇ ਕੋਐਫ਼ੀਸ਼ੈਂਟਾਂ ਵਿਚ ਰੈਸ਼ਨਲ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਫ਼ੀਲਡ $\mathbb{F}$ ਵਿਚ ਹਨ, ਅੱਤੇ ਗਲ ਹੋ ਰਹੀ ਹੈ ਓਵਰ $\mathbb{F}$ ਪੂਰੀ ਫ਼ੈਕਟਰਾਈਜ਼ੇਸ਼ਨ ਦੀ। 'ਲੈਮ ੩' ਨਾਲ ਰੂਟਾਂ ਦੀ ਰੈਸ਼ਨਲ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਕੀਸੀ ਇਕ V_α ਦੀ ਓਵਰ $\mathbb{R}$ ਰੈਸ਼ਨਲ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨ $\psi(V_\alpha)$ ਲਿਖ ਸੱਕਦੇ ਹਾਂ। ਪਰਮੂਟੇਸ਼ਨਾਂ ਜੋੜਦੀਆਂ V_α ਦੇ ਫ਼ੇਕਟਰ ਦੇ V_β ਬਣਾਂਦੀਆਂ ਹਨ ਗਰੂਪ। ਜੇ $\psi(V_\alpha)$ ਇਨਵੈਰੀਐਂਟ

ਹੈ ਐਸ ਥੱਲੇ, ਮਤਲਬ ਇਹ V_β ਵਿਚ ਸੀਮਿਟਰਿਕ ਰੈਸ਼ਨਲ ਓਵਰ $\mathbb{F}$ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨ ਹੈ, ਤਾਂ ਵਰਤਦੇ ਓਵਰ $\mathbb{F}$ ਨੀਉਟਣ ਥੀਓਰਮ ਇਹ ਫ਼ੈਕਟਰ ਦੇ ਕੋਐਫ਼ੀਸ਼ੈਂਟਸ ਦੀ ਰੈਸ਼ਨਲ ਓਵਰ $\mathbb{F}$ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨ ਹੈ। ਪਰ ਕੌਐਫ਼ੀਸ਼ੈਂਟਸ ਫ਼ੈਕਟਰ ਦੇ $\mathbb{F}$ ਵਿਚ ਹਨ, ਸੋ $\psi(V_\alpha)$ ਬਰਾਬਰ ਹੈ $\mathbb{F}$ ਦੀ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨ। ਦੂਜੇ ਲੋਟ, ਐਣੀ ਸੀਮਿਟਰੀ ਲਾਜ਼ਮੀ ਹੈ ਜੇ ਰੂਟਾਂ ਦੀ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨ $\psi(V_\alpha)$ ਬਰਾਬਰ ਹੈ $\mathbb{F}$ ਦੀ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨ : ਕਿਉਂਕਿ V_α ਸਾਂਝਾ ਰੂਟ ਹੈ ਐਸ ਬਰਾਬਰੀ ਅੱਤੇ ਆਪਣੇ ਓਵਰ $\mathbb{F}$ ਇਰਰੀਡੀਉਸੀਬਲ ਫ਼ੈਕਟਰ ਦਾ, ਸੋ--'ਲੈਮ ੧'--ਇਸ ਫ਼ੈਕਟਰ ਦੇ ਸਾਰ ਦੇ ਸਾਰੇ V_β ਲਈ ਵੀ ਇਹ ਬਰਾਬਰੀ ਸਹੀ ਹੈ।'$\square$ (ਯ) ਗਾਲਵਾ($\odot$) ਦੇ ਸਬਗਰੁਪਾਂ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਲਈ ਗਾਲਵਾ ਦਾ ਤਰੀਕਾ ਯਾਂ "ਗਾਲਵਾ ਥੀਓਰੀ" :-ਓਵਰ ਕੌਐਫ਼ੀਸ਼ੈਂਟ ਅੱਤੇ ਕੁਝ ਹੋਰ ਐਡਜੌਣਡ ਨੰਬਰਾਂ ਦੇ ਫ਼ੀਲਡ ਉਤਲੀ ਡਿਗਰੀ $n!$ ਇਕੁਏਸ਼ਨ ਦੇ ਇਰਰੀਡੀਉਸੀਬਲ ਫ਼ੈਕਟਰ ਛੋਟੇ ਤੋਂ ਛੋਟੇ ਬਣਾਏ ਜਾ ਸਕਦੇ ਨੇ, ਇਹਣਾਂ ਦੇ V_β ਨੂੰ ਜੋੜਦੀਆਂ ਪਰਮੂਟੇਸ਼ਨਾਂ ਦਿੰਦੀਆਂ ਹਨ ਸਾਰੇ ਸਬਗਰੂਪ, ਵਗੈਰਾ। $\square$ (ਰ) ਕੀਸੀ ਇਕੁਏਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਸੈਟ $K \subset \mathbb{C}\Omega^n$ ਦੇ ਗਾਲਵਾ($\odot$) ਜੈਨੇਰੇਟ ਕਰਦੇ ਹਨ ਗਾਲਵਾ(K), ਸੋ ਜੇ ਇਕ ਗਾਲਵਾ($\odot$) ਦਾ ਓਰਡਰ ਹੈ $n!$ ਤਾਂ ਗਾਲਵਾ(K) ਵਿਚ ਹਨ ਸਾਰੀਆਂ ਕਵਰਿੰਗ ਟਰਾਂਸਫ਼ੌਰਮੈਸ਼ਨਾਂ। ਇਹ 'ਅੱਲ-ਜਬਰਿਕ ਗਰੂਪ' ਨਹੀਂ ਰਿਨਭਰ ਕਰਦਾ ਕਿੰਵੇ K ਦਾ ਵਰਨਣ ਕਰ ਰਹੇ ਹਨ ਕੁਝ ਪੈਰਾਮੀਟਰਜ਼ k, ਪਰ

ਗਾਲਵਾ(K) ਦਿਆਂ ਓਹ ਟਰਾਂਸਫ਼ੌਰਮੈਸ਼ਨਾਂ ਜੋ ਪੈਰਾਮੀਟਰਜ਼ k ਦੀ ਸਪੇਸ ਉੱਤੇ ਕੀਸੀ ਸ਼ੀਟ ਨੂੰ ਓਹੀ ਕੌਮਪੋਨੈਂਟ ਵਿਚ ਮੈਪ ਕਰਦਿਆਂ ਹਨ ਬਣਾਂਦੀਆਂ ਹਨ ਨੌਰਮਲ ਸਬਗਰੂਪ, ਅਤੇ ਇਹ 'ਮੋਨੋਡਰੋਮੀ ਸਬਗਰੂਪ' ਅਕਸਰ ਛੋਟੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ:- ਉਧਾਰਣ : ਕਵਾਡਰੇਟਿਕਸ ਵਿਦ ਰੂਟ-ਸੱਮ ਜ਼ੀਰੋ $z^2 - k = 0, k \neq 0$ ਹੈ ਇਕ ਪੰਕਚੱਰਡ ਪਲੇਨ $K \subset \mathbb{C}\Omega^2$ ਜਿਸ ਤੇ ਰੂਟਾਂ ਦਾ ਗਰਾਫ਼ ਕੋਨੈਕਟਿਡ ਹੈ, ਸੋ ਇਸ ੧-੧ ਪੈਰਾਮੀਟਰ k ਨਾਲ ਮੋਨੋਡਰੋਮੀ ਪੂਰੀ ਗਾਲਵਾ$(K) \cong \mathbb{Z}_2$ ਹੈ; ਪਰ ਜੇ ਅਸੀਂ K ਨੂੰ ਮਣਦੇ ਹਾਂ ਇਕੁਏਸ਼ਨਾਂ $z^2 - k^2 = 0, k \neq 0$ ਤਾਂ ਇਸ ੨-੧ ਪੈਰਾਮੀਟਰ k ਦੀ ਸਪੇਸ ਉਤੇ ਪੁਲਡ-ਬੈਕ ਰੂਟਾਂ ਦਿਆਂ ਦੋ ਡਿਸਜੌਐਂਟ ਸ਼ੀਟਾਂ ਹਨ, ਸੋ ਹੁਣ ਮੋਨੋਡਰੋਮੀ ਸਬਗਰੂਪ ਟਰਿਵੀਅਲ ਹੈ। ਤੇ ਹਮੇਸ਼ਾ ਨੌਰਮਲ ਹੈ ਮੋਨੋਡਰੋਮੀ ਕਿਉਂਕਿ k-ਸਪੇਸ ਉਤੇ $n!$-ਫ਼ੋਲਡ ਕਵਰਿੰਗ ਸਪੇਸ ਦੀ ਕੋਈ ਟਰਾਂਸਫ਼ੋਰਮੈਸ਼ਨ g ਕੋਮਪੋਨੈਂਟਸ ਨੂੰ ਕੌਮਪੋਨੈਂਟਸ ਤੇ ਮੈਪ ਕਰਦੀ ਹੈ, ਸੋ ਜੇ h ਸਾਰੇ ਕੌਮਪੋਨੈਂਟਸ ਪਰੀਜ਼ਰਵ ਕਰਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ghg^{-1} ਵੀ ਇਸੀ ਕਿਸਮ ਦੀ ਹੈ। $\square$ (ਲ) ਤਰੇਤੇ ਦੀ ਇਹ ਸਰਲ ਉਧਾਰਣ ਧੁਰ ਤੱਕ ਜੈਨੇਰੇਲਾਇਜ਼ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ : ਡਿਸਕਰੀਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਸਕਵੇਅਰ ਰੂਟ ਹੈ $\mathbb{C}\Omega^n$ ਦਾ ਇਕ ਕੌਨੈਕਟਿਡ ਦੂਹਰਾ ਕਵਰ ਜਿਸ ਤੇ ਪੁਲਡ-ਬੈਕ $n!$-ਫ਼ੋਲਡ ਕਵਰਿੰਗ ਸਪੇਸ ਦੇ ਹਨ ਦੋ ਕੌਮਪੋਨੈਂਟ ਜਿਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਸ਼ੀਟਾਂ ਦਰਮਿਆਣ ਹਨ ਰੂਟਾਂ ਦਿਆਂ ਕੇਵਲ ਈਵਨ ਅਦਲਾ-ਬਦਲੀਆਂ, ਸੋ ਇਹ ਪੈਰਾਮੀਟਰਜ਼ ਥੱਲੇ ਮੋਨੋਡਰੋਮੀ ਸਬਗਰੂਪ ਦਾ ਓਰਡਰ ਹੈ $n!/2$:-

ਇਹ ਪੈਰਾਮੀਟਰਜ਼ ਹਨ ਹਿਲਦੀ $\odot \in \mathbb{C}\Omega^n$ ਦੇ ਕੋਐਫ਼ੀਸ਼ੈਂਟ ਅੱਤੇ ਇਕ ਸਕਵੈਅਰ ਰੂਟ ਇਹਨਾਂ ਦੀ ਓਹ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨ ਦਾ ਜੋ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਰੂਟਾਂ ਦੀ ਸਮਿਟਰਿਕ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨ $(\prod(x_i - x_j))^2$, ਸੋ ਜੇ ਗੇੜੀ ਮਾਰ ਇਹਣਾਂ ਦੀ ਅਸੀਂ ਵਾਪਸ ਆਂਦੇ ਹਾਂ ਅਸੰਭਵ ਹੈ ਕਿ ਸਿਰਫ਼ ਦੋ ਰੂਟਾਂ ਦੀ ਅਦਲਾ-ਬਦਲੀ ਹੀ ਹੋਈ ਹੋਵੇ ਕਿਉਂਕਿ ਐਸ ਥੱਲੇ $\prod(x_i - x_j)$ ਸਾਇਣ ਬਦਲ ਲੈਂਦਾ ਹੈ। ਮਸਲਨ $\odot \in \mathbb{C}\Omega^2$ ਲਈ ਇਹ ਪੈਰਾਮੀਟਰਜ਼ ਹਨ ਕਵਾਡਰੇਟਿਕਾਂ $x^2 + bx + c = 0$ ਦੇ ਕੋਐਫ਼ੀਸ਼ੈਂਟ b, c ਅੱਤੇ $\pm\sqrt{b^2 - 4c}$, ਪਰ ਹੁਣ, ਕਿਉਂਕਿ ਪੁਲਡ-ਬੈਕ $2!$-ਕਵਰਿੰਗ ਸਪੇਸ ਟਰਿਵੀਅਲ ਹੈ, ਦੋਨੋ ਰੂਟ x_1 ਤੇ x_2 ਵੀ ਕਾਇਮ ਹਨ ਪੁਲ-ਬੈਕ ਤੇ, ਸੋ ਇਹ ਪੈਰਾਮੀਟਰਜ਼ ਚ ਹੈ ਰੈਸ਼ਨਲ ਫ਼ੌਰਮੂਲਾ ਰੂਟਾਂ ਲਈ। ਬਿਲਕੁਲ ਐਂਵੇਂ, ਕਿਸੀ ਵੀ n ਲਈ ਜ਼ਰੂਰੀ ਤੇ ਕਾਫ਼ੀ ਹੈ ਸਾਰੀਆਂ ਇਕੁਏਸ਼ਨਾਂ $\odot \in \mathbb{C}\Omega^n$ ਨੂੰ ਹਲ ਕਰਣ ਲਈ : ਇਕ ਕੌਐਫ਼ੀਸ਼ੈਂਟਸ ਨਾਲ ਡੀਫ਼ਾਇਣਡ ਇਹਦੀ ਪਰਿਨਸੀਪਲ $n!$-ਫ਼ੌਲਡ ਕਵਰਿੰਗ ਸਪੇਸ ਦਾ ਪੁਲ-ਬੈਕ ਜੋ ਟਰਿਵੀਅਲ ਹੈ। ਅੱਗੇ, ਡਿਸਕਰੀਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਹੈ ਹਰ n ਲਈ ਕੋਐਫ਼ੀਸ਼ੈਂਟਸ ਵਿਚ ਇਕ ਸੁੰਦਰ ਡੇਟਰਮੀਨੈਂਟਲ ਫ਼ੌਰਮੂਲਾ, ਦੇਖੋ ਬਰਨਸਾਇਡ ਪੈਨਟਨ, ਤੇ ਇਹਦਾ ਸਕਵੇਅਰ ਰੂਟ ਰੀਅਲ ਸਵੈਲੋਟੈਲ $\mathbb{R}\Omega^n$ ਦੇ ਫ਼ੰਡਾਮੈਂਟਲ ਪਾਰਟੀਸ਼ਨ ਦੇ ਹਰ ਉਚਤੱਮ ਹਿੱਸੇ ਨੂੰ ਬਾਉਂਡਰੀ ਤੇ ਖੋਲ ਇਕ ਅੱਧ ਤੋਂ ਪੂਰੀ n-ਸਪੇਸ $\mathbb{R}^n$ ਬਣਾ ਦਿੰਦਾ ਹੈ। $\square$ (ਵ) ਮਸਲਨ ਰੀਅਲ ਕਿਉਬਿਕਸ ਜਿਹਨਾਂ ਦਾ ਰੂਟ-ਸੱਮ ਹੈ ਜ਼ੀਰੋ ਤੇ ਡਿਸਕਰੀਮੀਨੈਂਟ ਐਸ ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਦੀ ਇਹ ਦੋਹਰੀ ਅਣਫ਼ੋਲਡਿੰਗ ਨੂੰ ਹੀ ਅੱਗੇ ਕੀਉਬ ਰੂਟਸ ਨਾਲ ਪੂਰਾ ਅਣਫ਼ੋਲਡ ਕਰ ਖਵਾਰੱਜ਼ਮੀ ਦੇ ਰੇਨੇਸਾਂਸ ਚੇਲੇਆ ਨੇ ਬਣਾਏਆ ਸੀ ਅੱਲ-ਜਬਰਿਕ ਨੋਟ ੧੧ ਦਾ ਕਾਰਡਾਣ ਫ਼ੌਰਮੂਲਾ, ਦੂਜੇ ਹੀ ਪੱਣੇ ਤੇ ਐਸ ਪਰਚੇ ਦੇ, ਤੇ ਹੁਣ ਖਿਆਮ ਦੀ ਸੱਭ ਤੋਂ ਪਿਆਰੀ ਰੱਚਨਾਂ ਤੋਂ, ਜਿਸ ਤੋਂ ਸਾਫ਼ ਸੀ ਨਾਲ ਬਣਾਵਟ ਪੂਰੇ ਰੀਅਲ ਰੂਟਾਂ ਦੇ ਗਰਾਫ਼ ਦੀ!

ਐਸ ਗਰਾਫ਼ ਦੇ ਮੋਰਪੰਖੀ $\mathcal{S}$ ਦੋਹਰੇ ਕਵਰ ਦੇ ਕਲੋਯਰ ਉੱਤੇ ਹਨ ਸਰਕਲ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਇਕੋ ਪੀਰੀਅਡ ਦੀ ਟਰਾਈਸੈਕਸ਼ਨ, ਨੋਟ ੧੩, ਕਰਦਾ ਇਹ ਫ਼ੋਰਮੂਲਾ ਐਨੇਲੀਟਿਕ ਐਕਸਟੇਨਸ਼ਨ ਨਾਲ ਪੂਰੇ $C\Omega^3 \simeq S^1$

ਤੇ ਲਾਗੂ ਹੈ, ਯਾਣੀ ਕਿ ਦੋਹਰੇ ਕਵਰ ਦੀ ਇਹ ੩-੧ ਪੈਰਾਮੀਟਰਾਈਜ਼ੇਸ਼ਨ ਗਾਲਵਾ($\mathbb{C}\Omega^3$) $= S_3$ ਦੇ ਮੋਨੋਡਰੋਮੀ ਸਬਗਰੁਪ A_3 ਨੂੰ ਅੱਗੇ ਪੂਰਾ ਟਰਿਵੀਅਲ ਬਣਾ ਦਿੰਦੀ ਹੈ। ਡਿਗਰੀ $n = 4$ ਇਕੁਏਸ਼ਨਾਂ ਲਈ ਵੀ ਇਹੋ ਸਾਧਣ ਵਰੱਤਦਾ ਹੈ ਫ਼ੈਰਾਰੀ ਦਾ ਫ਼ੋਰਮੂਲਾ ਸਦਕੇ ਇਸ ਖਾਸ ਤੱਥ ਦੇ ਕਿ ਸਿਰਫ਼ $A_n, n = 4$ ਦਾ ਹੈ ਇਕ ਹੋਰ ਨੋਰਮਲ ਸਬਗਰੁਪ ਜੋ ਹੈ ਕਲਾਇਣ ਦਾ ਫ਼ੀਰਗਰੁਪਾ:- ਡਿਸਕਰੀਮੀਨੈਂਟ ਦੇ ਸਕਵੇਅਰ ਰੂਟ ਨਾਲ ਬਣੀ ਮੋਨੋਡਰੋਮੀ A_4 ਇਕ ੩-੧ ਕਵਰ ਥਲੇ ਬਣ ਜਾਂਦੀ ਹੈ $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ ਤੇ ਨਾਲ ਹਲ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੇ ਰੀਡੀਊਸਿੰਗ ਕੀਊਬਿਕ--ਦੇਖੋ ਬਰਣਸਾਇਡ ਪੈਨਟਨ--ਜਿਸ ਦੇ ਰੂਟਾਂ ਦੇ ਸਕਵੇਅਰ ਰੂਟਾਂ ਤੋ ਬਣ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਸਹਜੇ ੪-੧ ਕਵਰ ਜੋ ਮੋਨੋਡਰੋਮੀ ਨੂੰ ਪੂਰਾ ਟਰਿਵੀਅਲ ਬਣਾਂ ਦਿੰਦਾ ਹੈ। □ ਕਿ ਨਾਤਾ ਹੈ ਹਾਸ਼ਤਰੁਦੀ ਦੇ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਅਜੇ ਸ਼ੇਸ ਹੈ, ਪਰ ਜ਼ਾਹਿਰ ਹੈ A_4 ਦੀ ਇਕ ਖਾਸੀਅਤ ਇਸਤਮਾਲ ਕਰਦਾ ਇਹ ਤਰੀਕਾ ਅੱਗੇ ਨਹੀਂ ਤੁਰੁ। (ੜ) ਸ਼ਾਇਦ ਇਹ ਕਾਰਣ ਹੀ ਆਬਲ ਨੇ ਸ਼ੁਰੂ ਕੀਤੀ ਸੀ ਤੈਲਾਸ਼ ਦੋਹਰੀ ਪੀਰੀਓਡਿਕ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨਾਂ ਦੀ? ਜੋ ਓਹਨੂੰ ਮਿਲ ਗਏ ਲਾਯੋਂਦਰ ਦੇ ਇਨਟੈਗਰਲ ਉਲਟਾ ਕੇ।

ਤਰੇਤੇ ਦੇ ਨੋਟ ੫੦੬ ਦਾ ਡਿਗਰੀ ਚਾਰ ਇਕੁਏਸ਼ਨਾਂ ਲਈ ਤਰੀਕਾ ਸਿੱਧਾ A_4 ਤੋਂ ਮੋਨੋਡਰੋਮੀ ਟਰਿਵੀਅਲ ਬਣਾਂਦਾ ਹੈ, ਇਸਤਮਾਲ ਕਰਦਾ ਯਾਕੋਬੀ ਦੀਆਂ ਇਲਿਪਟਿਕ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਪੀਰੀਅਡ:- 'ਵੌਰਮ-ਅਪ' ਸੀ ਅਰਮੀਤ ਲਈ ਇਹ ਇਹੋ ਪੀਰੀਅਡਾਂ ਨਾਲ ਡਿਗਰੀ ਪੰਜ ਇਕੁਏਸ਼ਨਾਂ ਸ਼ੋਧਣ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ (ਪਰ ਜ਼ਿਆਦਾ ਕੁਦਰਤੀ ਹੈ ਓਹਦੇ ਤੇ ਕਰੋਨੇਕਰ ਦੇ $n = 5$ ਤਰੀਕੇਆ ਤੋਂ ਜੋ ਘੁਮਦੇ ਹਨ ਇਕੋਸਾਹੇਡਰਣ ਗਿਰਦ ਜਿਸ ਵਰਗਾ ਕੁਝ ਨਹੀਂ $n > 4$ ਯੁਕਲਿਡੀਅਣ ਸਪੇਸ ਵਿਚ)। ਇਹ ਤਰੀਕੇ ਦਾ ਕਰੀਬੀ ਹੈ ਸਾਡਾ ਫ਼ੋਰ ਹਾਫ਼ ਟਰਨਜ਼ ਤਰੀਕਾ : ਡਿਸਕਰੀਮੀਨੈਂਟ ਦੇ ਸਕਵੇਅਰ ਰੂਟ ਦੇ ੨-੧ ਗਰਾਫ਼ ਉੱਤੇ ਹਰ $\odot$ ਦੇ ਰੂਟਾਂ ਤੋਂ ਬਣੀ ਡਬਲਡ ਟਾਇਲਿੰਗ ਦੇ ਪੀਰੀਅਡ ਕੋਐਫ਼ੀਸ਼ੈਂਟਸ ਤੋਂ ਬਣੇ ਇਲੀਪਟਿਕ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦਿੰਦੇ ਹਨ ਸੋ ਇਹਨਾਂ ਦੀ ਬਾਈਸੇਕਸ਼ਨ ਦਿੰਦੀ ਹੈ ਇਕੁਏਸ਼ਨ ਦੇ ਰੂਟ। □ ਕੀਊਬਿਕਸ ਵਿਦ ਰੁਟ-ਸਮ ਜ਼ੀਰੋ ਲਈ ਵੀ ਹੈ ਵਾਏਰਸ਼ਟਰਾਸ ਦੀ $\wp(z)$ ਨਾਲ ਦੋਹਰੀ ਪੀਰੀਓਡਿਕ ਪੈਰਾਮੀਟਰਾਈਜ਼ੇਸ਼ਨ, ਤੇ ਗਲ ਜੰਵਾਂ ਸਾਫ਼ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਐਸ ਤੋਂ ਕਿ, ਹਰ ਡਿਗਰੀ $n > 4$ ਲਈ ਕਮ ਕਰਦਾ ਹੈ ਇਹ n ਹਾਫ਼ ਟਰਨਜ਼ ਦਾ ਤਰੀਕਾ, ਤੇ ਖੁਦ ਬਾ ਖੁਦ ਰੈਲੇਟਿਵੀਟੀ ਉਭਰ ਆਂਦੀ ਹੈ:- ਇਹ ਐਸ ਲਈ ਕਿ $\odot$ ਦੇ ਰੂਟਾਂ ਤੋਂ ਇਹ ਟਾਇਲਿੰਗ ਬਣਾਣਾ ਮੰਗਦਾ ਹੈ ਐਂਗਲ ਸਮ 2π, ਸੋ ਭੁਜਾਂਵਾਂ ਕੋਨਕੇਵ ਸਰਕੁਲਰ ਬਣ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ ਤੇ ਇਹ ਗਰੂਪ ਦੀ ਮਾਰ ਇਕ ਫ਼ਾਏਨਾਇਟ ਰੈਡੀਅਸ ਦੀ ਓਪੈਣ ਡਿਸਕ ਹੀ ਰਹਿ ਜਾਂਦੀ ਹੈ : ਛੱਡਣਾ ਪੈਂਦਾ ਹੈ ਸਾਣੂ ਯੁਕਲਿਡੀਅਣ ਪਖੰਡ ਇਣਫ਼ੇਨਾਇਟ ਪਲੇਨ ਦਾ! ਪਰ ਦੂਏ ਹੱਥ ਇਹ ਡੱਬਲਡ ਟਾਈਲਿੰਗਜ਼ ਦੇ ਪੀਰੀਅਡ ਵੀ ਵੈਸੇ ਹੀ ਕੋਐਫ਼ੀਸ਼ੈਂਟਸ ਤੋਂ ਬਣੇ ਹਾਈਪਰਇਲੀਪਟਿਕ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੈਂਦੇ ਹਨ, ਸੋ ਫ਼ੇਰ ਸਮਝੋ ਇਹਨਾਂ ਦੀ ਬਾਈਸੇਕਸ਼ਨ ਹਲ ਕਰ ਦੇਂਦੀ ਹੈ ਐਨੇਲੀਟਿਕ ਐਕਸਟੇਨਸ਼ਨ ਨਾਲ ਹਰ ਇਕੁਏਸ਼ਨ $\odot \in \mathbb{C}\Omega^n$। □

ਗੇੜਾ ਜੋ ਇਕ ਹੋਰ ਪੂਰਾ ਹੋ ਗਿਆ ਹੈ ਅੱਜ, ਲੈ ਵਾਹਿਗੁਰੂ ਦਾ ਨਾਮ ਮੈਂ ਪੋਸਟ ਕਰ ਰਿਹਾ ਹਾਂ ਇਹ ਭਾਗ ਪੰਜਵਾਂ, ਪਰ ਅੰਤਿਮ ਟਿਪਣੀਆਂ ਨੂੰ ਨਿਖਾਰਣ ਅਤੇ ਤਰਜਮੇ ਦਾ ਬਾਕੀ ਹੈ ਕਮ।

ਕੇ ਐਸ ਸਰਕਾਰੀਆ ੧੧ ਅਪਰੈਲ ੨੦੨੦