ਸੱਭ ਤੋਂ ਪਿਆਰੀ ਰੱਚਣਾ, ਭਾਗ ਤੀਜਾ

੩੪. ਤਰੀਕਾ ਨੋਟ ੩੩ ਦਾ, ਜੋ ਇਕ ਅਗਿਆਤ x ਵਿੱਚ ਡਿਗਰੀ n ਦੀ ਕੋਈ ਵੀ ਇਕੁਏਸ਼ਨ ਦੇ ਸਾਰੇ ਰੂਟ ਦਿੰਦਾ ਹੈ, ਦੇ ਨਾਲ ਹੀ ਉਠਦੇ ਹਨ ਕਈ ਸਵਾਲ। ਕਿ ਇਹਨੂੰ, ਜਿੰਵੇ ਜਾਪਦੈ, ਅੱਗੇ ਧੱਕ ਕੇ ਕੌਂਜੁਗੇਟ ਕੌਮਪਲੈਕਸ ਰੂਟਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇ ਵੀ ਮਿਲ੍ਹ ਜਾਣ ਗੇ, ਅੱਤੇ ਇਹਦੀ ਜੀਓਮੈਟਰੀ ਨੂੰ ਕੌਮਪਲੈਕਸੀਫ਼ਈ ਕਰਕੇ $\mathbb{C}$ ਉੱਤੇ ਸਾਰਿਆਂ ਇਕੁਏਸ਼ਨਾਂ ਦਾ ਹਲ ਵੀ ? ਜ਼ਿਆਦਾ ਖਿਚਾਉ ਇਸਤੋਂ, ਕਿ ਕੋਈ n-ਸਿਫ਼ੀਅਰ ਦੀ ਜੀਓਮੈਟਰੀ ਇਸਤਮਾਲ ਕਰਦਾ ਅੱਤੇ ਡਿਸਟੌਰਸ਼ਨ ਮੁਕਤ ਇਹਦਾ ਭਰਾ ਹੈ ਜੋ ਦੋ ਅਗਿਆਤ x ਅਤੇ y ਵਿਚ ਸਾਰਿਆਂ ਹੋਮੋਜੀਨਸ ਰੀਅਲ ਡਿਗਰੀ n ਇਕੁਏਸ਼ਨਾਂ ਨੂੰ ਹਲ ਕਰਦੈ ? ਜੇ ਹਾਂ ਖਬਰੇ ਇਕ n-ਸਿਫ਼ੀਅਰੀਕਲ ਵੀਏਟਾ ਵਰਗੀ ਵਿਧੀ ਹਲ ਕਰਦੀ ਸਾਰੀਆਂ ਇਕੁਏਸ਼ਨਜ਼ ਓਫ਼ ਪਰੋਜੈਕਟਿਵ ਰੀਅਲ n-ਸਵੈਲੋਟੇਲ, i.e., ਸਾਰਿਆਂ ਇਕੁਏਸ਼ਨਾਂ $\mathbb{R}P^n$ ਦਿਆਂ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸਾਰੇ ਰੂਟ ਰਿਅਲ ਹਨ, ਇਕ n-ਮੈਨੀਫ਼ੋਲਡ-ਵਿਦ-ਬਾਉਂਡਰੀ ਜਿਹਦੀ ਟੋਪੌਲੋਜੀ ਅਸੀ ਕੱਢ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ, ਦੇਖੋ ਐਫ਼ਟ ਫ਼ਟਾ ਨੋਟਸ (ਬ|੨੧,੨੨) ? ਸੋ ਐਨੇਲਿਟਿਕ ਕੌਂਟੀਨੂਏਸ਼ਨ ਦੇ ਦੇਵੇਗੀ -- ਕਿਂਉਕਿ ਕੌਮਪਲੈਕਸ ਪਰੋਜੈਕਟਿਵ n-ਸਵੈਲੋਟੇਲ, i.e., ਸਾਰਿਆਂ ਇਕੁਏਸ਼ਨਜ਼ $\mathbb{C}P^n$ ਦਿਆਂ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੇ n ਵਖਰੇ ਰੂਟ ਹਨ, ਕੋਨੈਕਟਿਡ ਅਤੇ ਡੈਂਸ ਹੈ -- ਇਕ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨ ਥਿਓਰੈਟਿਕ ਤਰੀਕਾ $\mathbb{C}$ ਉੱਤੇ ਸਾਰਿਆਂ ਇਕੁਏਸ਼ਨਜ਼ ਹਲ ਕਰਣਦਾ ? ਐਪਰ, ਸਾਡੇ ਲਈ ਰੀਅਲ n-ਸਵੈਲੋਟੇਲ (ਅੱਤੇ ਅੱਗੇ $\mathbb{R}P^n$ ਯਾਂ ਓਸਦੇ ਕਵਰ S^n ਦਾ ਫ਼ੰਡਾਮੈਂਟਲ ਪਾਰਟੀਸ਼ਨ) ਹੀ ਕੁਦੱਰਤੀ ਹੈ, ਨਾਂਕਿ ਇਕੂਏਸ਼ਨਾਂ ਨੂੰ ਹ.ਲ ਕਰਦੇ ਫ਼ੌਰਮੂਲੇ, ਇਹ ਤਾਂ ਆਪੇ ਹੀ ਨਿੱਕਲ ਆਣੇ ਚਾਹੀਦੇ ਹਨ ਇਹ ਦੀ ਜੀਓਮੈਟਰੀ ਦੇ ਗਿਆਨ ਤੋਂ।

੩੫. ਇਹ ਮਾਰਗ ਹੋ ਸਕਦੈ ਸਾਂਨੂੰ ਫ਼ੇਰ ਲੈ ਜਾਵੇ ਖਿਆਮ ਦੇ ਤਰੀਕੇ ਤੋਂ ਯੋਰਦਾਂ ਦੇ "ਰੈਜ਼ੋਲੂਸੀਓਂ ਪਾਰ ਲੇ ਇਕੁਆਸੀਓਂ ਦ ਲ ਬੀਸੇਕਸੀਓਂ ਦੇ ਫ਼ੌਂਕਸੀਓਂ ਇਪਰਇਲੀਪਤੀਕ" ਤੱਕ? ਕਿਉਂਕਿ ਓਹਦੀ ਕਿਤਾਬ "ਤਰੇਤੇ ਦੇ ਸੱਬਸਟੀਟੁਸੀਓਂ" (੧੮੭੦) ਦੀ ਇਹ ਵਿਧੀ ਹੀ "ਫ਼ੰਕਸ਼ਨ ਥਿਓਰੈਟਿਕ ਤਰੀਕਾ $\mathbb{C}$ ਉੱਤੇ ਸਾਰਿਆਂ ਇਕੁਏਸ਼ਨਜ਼ ਹਲ ਕਰਣਦਾ" ਹੋਵੇਗਾ? ਹੋਰ ਬਹੁਤ ਕੁਝ ਸੰਬੰਧਿਤ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨ ਥੀਉਰੀ ਬਾਰੇ ਹੈ ਉਮੇਮੁਰਾ ਦੇ ਪਰਚੇ "ਰੈਜ਼ੋਲਿਉਸ਼ਨ ਓਫ਼ ਅੱਲਜੱਬਰਿਕ ਇਕੁਸ਼ਨਜ਼ ਬਾਏ ਥੀਟਾ ਕੌਂਸਟੈਂਟਸ" (੧੯੮੪) ਵਿੱਚ। ਕੋਮਪਲੈਕਸ n-ਸਵੈਲੋਟੇਲ ਦੇ ਹਰ ਪੋਐਂਟ ਨਾਲ ਬੰਧੀ ਹੋਈ ਹੈ ਇਕ ਹਾਈਪਰਇਲਿਪਟਿਕ ਕਰਵ, ਜੋ ਹੈ ਜੀਨਸ $[\frac{n-1}{2}]$ ਦਾ ਕਲੋਜ਼ਡ 2-ਮੈਨੀਫ਼ੋਲਡ, ਅਤੇ ਹਾਈਪਰਇਲਿਪਟਿਕ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨਜ਼ ਇਹਨੂੰ ਯੂਨੀਫ਼ੋਰਮਾਇਜ਼ ਕਰਦੀਆਂ ਹਨ। ਡਿਗਰੀ $n = 5$ ਇਕੁਏਸ਼ਨਾਂ ਲਈ, ਇਹ ਜੀਨਸ ਤਾਂ ਦੋ ਹੈ, ਪਰ ਤਾਂਹ ਵੀ ਅਰਮੀਤ ਅੱਤੇ ਕਰੋਨੈਕਰ ਨੇ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ੧੮੫੮ ਵਿੱਚ ਇਲਿਪਟਿਕ ਮੋਡੁਲਰ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨਜ਼ ਨਾਲ ਹੀ ਹਲ ਕਰ ਲਿਤਾ ਸੀ। ਇਸ ਬੜੇ ਖਾਸ ਕੇਸ $n = 5$ ਉੱਤੇ ਹੋਰ ਚਾਣਨ ਪਾਇਆਂ ਸੀ ਬਾਦ ਵਿਚ ਕਲਾਇਨ ਦੀ ਇਕੋਸਾਹੈਡਰਨ ਉੱਤੇ ਕਿਤਾਬ ਨੇ। ਓਹਦਰ, ਯੁਨੀਫ਼ੋਰਮਾਈਜ਼ਿੰਗ ਦਾ ਜੈਨੇਰਲ ਵਿਚਾਰ, ਯਾਣੀ ਕਿ ਆਪਣਿਆਂ ਓਟੋਮੋਰਫ਼ਿਕ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨਜ਼ ਨਾਲ ਕੋਮਪਲੈਕਸ ਕਰਵਜ਼ ਨੂੰ "ਹਲ" ਕਰਣ ਦਾ, ਬਾਦ ਵਿਚ ਪਵਾਂਕਾਰੇ ਨੇ ਦਿਤਾ ਸੀ।

੩੬. ਨੋਟ ੩੩ ਦਿਆਂ ਕਰਵਜ਼ $P(\alpha), \alpha \in \mathbb{R}$ ਪੌਐਂਟ $p \in \mathbb{R}^{n-1}$ ਵਿੱਚੋਂ ਓਣੀ ਹੀ ਵਾਰ ਲੰਘਦਿਆਂ ਹਨ ਜਿਨ੍ਹੇ ਐਸ ਇਕੁਏਸ਼ਨ p ਦੇ ਵਖਰੇ ਰਿਅਲ ਰੂਟ ਹਨ, ਅਤੇ ਕਿਸੀ ਹੋਰ $\mathbb{R}^{n-1}$ ਦੇ ਪੌਐਂਟ ਵਿਚੋਂ ਹਦ ਇਕ ਵਾਰ:- ਕਿਉਂਕਿ p ਖੁਦ ਆਪਣਾ ਪ੍ਰਤਿਬਿੰਬ ਓਦੋਂ ਤੇ ਓਦੋਂ ਹੈ ਜੇ $p \in$ @ ਅਤੇ ਦੂਸਰੇ ਸ਼ੀਸ਼ੇਆਂ @ ਵਿਚ ਇਹਦੇ ਇਮੇਜ ਅਲਗ ਅਲਗ ਹਨ। □

ਜੇ n ਓਡ ਹੈ, ਯਾਂ ਭਾਂਵੇਂ n ਈਵਨ ਪਰ p ਦਾ ਕੋਈ ਰਿਅਲ ਰੁਟ ਹੈ, ਤਾਂ P ਕੋਈ ਵੀ $\mathbb{R}^{n-1}$ ਤੋਂ ਛੋਟੇ ਫ਼ਲੈਟ ਵਿਚ ਨਹੀਂ:- ਜੇ $c_0(p_0+2t(\alpha))+c_1(p_1+\alpha 2t(\alpha))+\cdots+c_{n-2}(p_{n-2}+\alpha^{n-2}2t(\alpha))$, ਜਿੱਥੇ $t(\alpha) = -\frac{\alpha^n+p_{n-2}\alpha^{n-2}+\cdots+p_1\alpha+p_0}{\alpha^{2(n-2)}+\cdots+\alpha^2+1}$, ਕੋਂਸਟੈਂਟ ਹੈ ਸੱਭ α ਲਈ, ਤਾਂ $\alpha = 0$ ਦਰਸਾਓਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਆਈਡੈਂਟਿਕਲੀ $-c_0p_0+c_1p_1+\cdots+c_{n-2}p_{n-2}$ ਹੇ। ਸੋ $c_0 2t(\alpha)+c_1\alpha 2t(\alpha)+\cdots+c_{n-2}\alpha^{n-2}2t(\alpha) = -2c_0p_0$, ਯਾਣੀ ਕਿ, $(c_0+c_1\alpha+\cdots+c_{n-2}\alpha^{n-2})(\alpha^n+p_{n-2}\alpha^{n-2}+\cdots+p_1\alpha+p_0) = c_0p_0(\alpha^{2(n-2)}+\cdots+\alpha^2+1)$। ਸੋ $c_{n-2} = c_{n-3} = 0$, $c_{n-4} = c_0p_0$ ਅੱਤੇ $c_{n-5} = 0$। ਜੇ $c_0p_0 = 0$ ਸੱਬ c_i ਜ਼ੀਰੋ ਹਨ, ਜੇ ਨਹੀਂ $c_0p_0 \neq 0$ ਨਾਲ ਤੱਕਸੀਮ ਦਿੰਦੀ ਹੈ $(\alpha^{n-4}+b_{n-6}\alpha^{n-6}+\cdots+b_0)(\alpha^n+p_{n-2}\alpha^{n-2}+\cdots+p_1\alpha+p_0) = \alpha^{2(n-2)}+\cdots+\alpha^2+1$ ਜਿੱਥੇ $b_i = c_i/c_o p_0$, ਪਰ ਇਹ ਹੋ ਨਹੀਂ ਸਕਦਾ ਜੇ ਦੂਜਾ ਫ਼ੈਕਟਰ ਕੋਈ α ਲਈ ਜ਼ੀਰੋ ਹੈ, ਕਿਂਉਕਿ ਸੱਜੀ ਰਕਮ ਹਰ α ਲਈ ਪੋਜ਼ੀਟਿਵ ਹੈ। □

ਜੇ n ਈਵਨ ਹੈ ਤਾਂ ਗਿਣਤੀ ਦੇ ਛੱਟਵੇਂ $p \in \mathbb{R}^{n-1}$ ਲਈ ਉਤਲਾ ਨਤੀਜਾ ਸਹੀ ਨਹੀਂ, ਇਹ ਹਨ ਓਹ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਰੁਟ $n/2$ ਅਲਗ ਕੋਨਜੁਗੇਟ ਜੋੜੇ ਹਨ ਜੋ ਯੁਣੀਟੀ ਦੇ $(2n-2)$ਥ ਰੂਟ ਵੀ ਹਨ:- ਵਰਤੋ ਉੱਤੇ

ਦਿੱਤੀ ਫ਼ੈਕਟਰਆਈਜ਼ੇਸ਼ਨ ਨੋਟ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਕਿ $\alpha^{2(n-2)}+\cdots+\alpha^2+1$ ਦੇ ਰੂਟ ±1 ਨੂੰ ਛੱਡ ਯੂਣੀਟੀ ਦੇ ਸਾਰੇ $(2n-2)$ਥ ਰੂਟ ਹਨ। □ ਹੁਣ $\text{aff}(P)\subset\mathbb{R}^{n-1}$ ਦੀ ਕੋਡਾਈਮੈਨਸ਼ਨ ਇਕ ਹੈ:- ਕਿਉਂਕਿ ਬਾਕੀ ਦੇ $n-2-n/2$ ਜੋੜੇ ਪਹਲੇ ਫ਼ੈਕਟਰ ਨੂੰ ਸੋ c_i/c_0 ਨੂੰ ਫ਼ਿਕਸ ਕਰ ਦਿੰਦੇ ਹਨ। □

ਸੋ ਇਹ ਛੱਟਵੇਂ ਖਾਸ ਪੌਐਂਟਾ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਹਦ $\binom{n-2}{n/2}$ ਪਰ ਅਕਸਰ ਘੱਟ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ $p\in\mathbb{R}^{n-1}$ ਦੇ ਸਾਰੇ ਰੂਟਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਵੀ ਤਾਂ ਜ਼ੀਰੋ ਚਾਹਿਦਾ ਹੈ, ਮੱਸਲਣ, $n=6$ ਲਈ ਕੋਈ ਛੱਟਵਾਂ ਪੋਐਂਟ ਨਹੀ:- ਯੁਨੀਟੀ ਦੇ ਗਵਾਂਡੀ 10ਥ ਰੂਟਾਂ 'ਚ $\pi/5$ ਦਾ ਐਂਗਲ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਚਾਰ ਕੌਂਜੁਗੇਟ ਜੋੜੇਆਂ ਚੋਂ ਕੋਈ ਤਿਣ ਨੂੰ ਜਮਾਂ ਕਰਕੇ ਜ਼ੀਰੋ ਨਹੀਂ ਬਣ ਸੱਕਦਾ ਕਿਉਂਕਿ ਤਾਂ ਚੌਥੇ ਦਾ ਜੋੜ $w+\overline{w}$ ਜ਼ੀਰੋ ਹੋਵੇਗਾ ਜੋ ਸਹੀ ਨਹੀਂ। □ ਦੂਜੀ ਤਰਫ਼, ਜੇ $4|n$ ਤਾਂ $\binom{n/2-1}{n/4}$ ਛੱਟਵੇਂ ਪੌਐਂਟ ਤਾਂ ਸਪਸ਼ਟ ਹਨ:- ਕੋਈ ਚਾਰ $\{\pm w,\pm\overline{w}\}$ ਕੌਮਪਲੈਕਸ ਯੁਨੀਟੀ ਦੇ $(2n-2)$ਥ ਰੂਟਾਂ ਦਾਂ ਜੋੜ ਜ਼ੀਰੋ ਹੈ, ਲੈ ਲਵੋ $n/4$ ਐਸੇ ਕਵਾਰਟੈਟ। □ ਪਰ $4|n$ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ, $n=10$ ਲਈ ਵੀ ਛੱਟਵੇਂ ਪੌਐਂਟ ਹਨ:- ਯੂਨੀਟੀ ਦੇ 18ਥ ਗਵਾਂਡੀ ਰੂਟ $\pi/9$ ਦੀ ਦੂਰੀ ਤੇ ਹਨ। ਕੋਈ ਤਿਣ ਕੋਮਪਲੈਕਸ ਲੈ ਲਵੋ ਜਿਣਹਾਂ ਦੀ ਆਪਸੀ ਦੂਰੀ $2\pi/3$ ਹੈ, ਨਾਲ ਓਹਨਾਂ ਦੇ ਕੌਂਜੁਗੇਟ। ਤਾਂ ਬਾਕੀ ਦੇ 5 ਕੌਂਜੁਗੇਟ ਜੋੜੇ ਬਣਾਂਦੇ ਹਨ ਇਕ ਅਸੱਧਾਰਣ p। □

੩੭. ਇਹ ਕਿ ਇਕ ਖਾਸ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਨੂੰ ਸਰਕਲਾਂ ਨਾਲ ਕਟ ਕਿ ਨਾ ਸਿਰਫ਼ ਡਿਗਰੀ 3 ਪਰ ਡਿਗਰੀ 4 ਦਿਆਂ ਇਕੁਏਸ਼ਨਾਂ ਨੂੰ ਵੀ ਹਲ ਕਿਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ - ਨੋਟ ੨੪ - ਦਾ ਸ਼ਾਇਦ ਖੱਯਾਮ ਨੂੰ ਪਤਾ ਸੀ, ਪਰ ਇਹਦਰ ਇਸ਼ਾਰਾ ਕੁਝ ਹੀ ਸਾਲ ਪਹਿਲਾਂ ਹਾਸ਼ਤਰੂਦੀ ਨੇ ਕਿਤਾ ਸੀ। ਸਾਡੇ ਲਈ, ਇਹ ਪੈਰਾਬੋਲਾ $n=4$ ਦੇ ਇਕਲੋਤੇ ਛੱਟਵੇ ਪੌਐਂਟ ਨਾਲ ਬੰਧੇਆ ਹੋਏਆ ਹੈ:- ਇਹ ਪੋਐਂਟ ਹੈ $p=(1,0,1)$ ਜਦ $t(\alpha)=-1$ ਅੱਤੇ $P(\alpha)=(-1,-2\alpha,1-2\alpha^2)$, i.e., ਪੈਰਾਬੋਲਾ $u_0=-1,u_2=1-u_1^2/2$। ਇਸ ਲਈ ਕਿਸੀ $\mathrm{x}^4+u_2\mathrm{x}^2+u_1\mathrm{x}+u_0=0$ ਦੇ ਰੀਅਲ ਰੂਟ ਆਪਾਂ ਓਹ ਕੱਟਾਂ ਤੋਂ ਪੱੜ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜੋ ਇਸ ਪੈਰਾਬੋਲੇ ਉੱਤੇ ਬਣਾਂਦਾ ਹੈ $(1,0,1)$ ਵਿਚੋਂ ਲੰਘਦਾ ਓਹ 2-ਸਫ਼ਿਅਰ ਜਿਹਦਾ ਸੈਂਟਰ (u_0,u_1,u_2) ਹੈ। ਸੋ ਇਹ ਹਨ ਓਸ ਸਰਕਲ ਦੇ ਕਟ ਜੋ ਇਸ ਸਫ਼ਿਅਰ ਅੱਤੇ ਪਲੇਨ $u_0=-1$ ਉੱਤੇ ਹੈ, i.e., ਸਰਕਲ ਵਿਦ ਸ਼ੈਂਟਰ $(-1,u_1,u_2)$ ਐਂਡ ਰੇਦਿਅਸ $\sqrt{-4u_0+u_1^2+(u_2-1)^2}$ (ਅਗਰ ਇਹ ਇਮੈਜੀਨੈਰੀ ਹੈ ਤਾਂ ਕੋਈ ਰੀਅਲ਼ ਰੂਟ ਨਹੀਂ)। □ ਸੋ ਕੋਈ ਕਿਉਬਿਕ $\mathrm{x}^3+u_2\mathrm{x}+u_1=0$ ਹਲ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਪਲੈਨ $u_0=0$ ਦੇ ਪੈਰਾਬੋਲਾ $u_2=1-u_1^2/2$ ਉੱਤੇ ਓਸ ਸਰਕਲ ਦੇ ਕਟਾਂ ਨਾਲ ਜਿਹਦਾ ਸੈਂਟਰ ਹੈ (u_1,u_2) ਅੱਤੇ ਰੇਡਿਅਸ $\sqrt{u_1^2+(u_2-1)^2}$ ਯਾਣੀ ਕਿ ਜੋ $(0,1)$ ਵਿਚੋਂ ਲੰਘਦਾ ਹੈ। □

ਪਰ ਜੇ $n>4$ ਤਾਂ ਸਰਕਲਾਂ ਨਾਲ ਗੁਜ਼ਾਰਾ ਨਹੀਂ, ਆਮ p ਦੇ ਸਾਡੇ ਜੈਨੈਰਲਆਈਜ਼ਡ ਪੈਰਾਬੋਲਾ P ਨੂੰ $(n-2)$-ਸਫ਼ਿਅਰਾਂ ਨਾਲ, ਅਤੇ ਖਾਸ ਯਾਂ ਛੱਟਵੇਂ p ਦੇ P ਨੂੰ $(n-3)$-ਸਫ਼ਿਅਰਾਂ ਨਾਲ ਕਟਣਾਂ ਲਾਜ਼ਮੀ ਹੈ। ਇਹ ਇਸ ਲਈ ਕਿ $P(\alpha)$ ਦੇ ਕੋਈ n ਪੌਐਂਟ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਪੈਰਾਮੀਟਰਜ਼ α ਦਾ ਜੋੜ ਜ਼ੀਰੋ ਹੈ ਇਕੋ $(n-3)$-ਸਫ਼ਿਅਰ ਤੇ ਹਨ :- ਇਹ ਹੈ ਇੰਟਰਸੈਕਸ਼ਨ $\text{aff}(P)$ ਅੱਤੇ ਓਸ $(n-2)$-ਸਫ਼ਿਅਰ ਦੀ ਜੋ p ਵਿਚੋਂ ਲੰਘਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਜਿਸ ਦਾ ਸੈਂਟਰ $\odot$ ਹੈ ਓਹ ਡਿਗਰੀ n ਦੀ ਇਕੁਏਸ਼ਨ ਜਿਹਦੇ n ਰੂਟ ਪੈਰਾਮੀਟਰ α ਦਿਆਂ ਇਹ n ਕੀਮਤਾਂ ਹਨ। □

ਸਪੇਸ ਸਾਰਿਆ ਡਿਗਰੀ n ਇਕੁਏਸ਼ਨਾਂ ਦੀ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ n ਵਖਰੇ ਰੀਅਲ ਰੂਟ ਹਨ ਨੂੰ ਪਰੋਜੈਕਟਿਵਲੀ ਕੌਮਪੈਕਟੀਫ਼ਾਈ ਕਰਕੇ ਬਣਦੀ ਹੈ ਓਹ n-ਸਵੈਲੋਟੇਲ ਜਿਹਦਾ ਜ਼ਿਕਰ ਹੁਣੇ ਅਸੀ ਨੋਟ ੩੪ ਵਿਚ ਕਿਤਾ ਸੀ। ਇਹਦੀ ਟੋਪੌਲੋਜੀ ਬਾਰੇ ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਜੇ n ਓਡ ਹੈ ਤਾ ਇਹ ਸਿਰਫ਼ ਇਕ ਸਰਕਲ ਤੇ ਕਲੋਜ਼ਡ $(n-1)$-ਬੌਲ ਦੀ ਆਮ ਜ਼ਰਬ ਹੈ, ਪਰ ਜੇ n ਈਵਨ ਹੈ ਤਾਂ ਇਹ ਇਹਨਾਂ ਦੀ ਇਕ ਖਾਸ $\mathbb{Z}/2$-ਜ਼ਰਬ ਹੈ। ਹੁਣ ਸਾਡੇ ਖਾਸ ਜੈਨੈਰਲਆਈਜ਼ਡ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਵੀ ਸਿਰਫ਼ n ਈਵਨ ਲਈ ਹੀ ਮੌਜੂਦ ਹਨ ਅਤੇ ਓਦੋਂ ਵੀ ਸਿਰਫ਼ ਗਿਣਤੀ ਦੇ। ਇਹ ਸੰਕੇਤ ਕਰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਖਾਸ ਜੈਨੈਰਲਆਈਜ਼ਡ ਪੈਰਾਬੋਲੇ ਸ਼ਾਇਦ ਵੈਣ ਕੈਮਪਣ ਅਤੇ ਸ਼ਟੀਫ਼ਲ ਦੇ ਮੌਡ 2 ਇਨਵੇਰੀਐਂਟਸ ਨਾਲ ਜੁੜੇ ਹਨ? ਪਰ ਜੇ ਆਪਾਂ ਪਹਲਾਂ ਓਸੇ ਸਪੇਸ ਨੂੰ ਕੋਮਲੈਕਸੀਫ਼ਾਈ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਫ਼ੇਰ ਕੌਮਪੈਕਟੀਫ਼ਾਈ ਤਾਂ ਬਣਦਾ ਹੈ ਕਲੋਜ਼ਡ $2n$-ਡਾਈਮੈਨਸ਼ਨਲ ਮੈਨੀਫ਼ੋਲਡ $\mathbb{C}P^n$, ਜਿਹਦੇ, ਜੇ 4 ਇਹਦੀ ਡਾਈਮੈਨਸ਼ਨ ਨੂੰ ਵਿਭਾਜਿਤ ਕਰਦੈ, ਹਨ ਪੌਂਟਰੀਆਗਿਣ ਦੇ ਓਹ $\mathbb{Z}$ ਇਨਵੇਰੀਐਂਟਸ। ਖਬਰੇ ਇਹਨਾਂ ਦਾ ਵੀ ਕੁਝ ਲੈਣਾ ਦੇਣਾ ਹੋਏ ਇਸ ਤਥ ਨਾਲ ਕਿ ਨੋਟ ੩੬ ਦੀ ਓਸ ਫ਼ੈਕਟਰਆਈਜ਼ੇਸ਼ਨ ਵਿਚ ਓਹ ਦੋ ਪੌਲੀਨੋਮੀਅਲਜ਼ ਦਿਆਂ ਡਿਗਰੀਆਂ ਵਿਚ 4 ਦਾ ਅੰਤਰ ਸੀ ...

੩੮. ਬਗੈਰ "ਰੂਟਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਜ਼ੀਰੋ" ਦੇ ਨੋਟ ੩੩ ਦਾ ਤਰੀਕਾ ਇਹ ਬਣ ਜਾਂਦੈ :- ਕੋਈ ਡਿਗਰੀ n

ਇਕੁਏਸ਼ਨ $\mathbf{x}^n+u_{n-1}\mathbf{x}^{n-1}+\cdots+u_0=0$ ਹੈ ਇਕ ਪੌਐਂਟ $(u_0,\ldots,u_{n-1})=\odot$ ਸਪੈਸ $\mathbb{R}^n$ ਦਾ। ਸਬਸੈਟ @ ਸਾਰਿਆਂ ਇਕੁਏਸ਼ਨਾਂ ਜਿਨਹਾਂ ਦਾ α ਇਕ ਰੂਟ ਹੈ ਹਾਈਪਰਪਲੇਨ $\alpha^n+u_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+u_0=0$ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਸੱਭ ਚੱਪਟੇ ਸ਼ੀਸੇਆਂ ਵਿਚ ਇਕ ਫ਼ਿਕਸਡ ਪੌਐਂਟ $p=(p_0,...,p_{n-1})$ ਦੇ ਸਾਰੇ ਪ੍ਰਤੀਬਿੰਬ ਬਣਾਂਦੇ ਹਣ ਪੈਰਾਮੀਟਰਾਈਜ਼ਡ ਕਰਵ $P(\alpha)=(p_0+2t(\alpha),p_1+\alpha 2t(\alpha),\ldots,p_{n-1}+\alpha^{n-1}2t(\alpha))$, $t(\alpha)=-\frac{\alpha^n+p_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+p_1\alpha+p_0}{\alpha^{2(n-1)}+\cdots+\alpha^2+1}$। ਸੋ, ਕਿਸੀ ਵੀ ਡਿਗਰੀ n ਇਕੁਏਸ਼ਨ $\odot$ ਦੇ ਰੀਅਲ ਰੂਟ ਆਪਾਂ ਪੜ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਓਹ ਕੱਟਾਂ ਤੋਂ ਜੋ ਫ਼ਿਕਸਡ ਕਰਵ P ਉੱਤੇ ਬਣਾਂਦਾ ਹੈ p ਵਿਚੋਂ ਲੰਘਦਾ ਓਹ $(n-1)$-ਸਫ਼ਿਅਰ ਜਿਸ ਦਾ ਸੈਂਟਰ $\odot$ ਹੈ। □

ਅੱਗੇ, $\mathrm{aff}(P)\neq\mathbb{R}^n$ ਓਦੋਂ ਤੇ ਓਦੋਂ ਹੀ ਸਹੀ ਜਦੋਂ n ਈਵਨ ਹੈ ਅਤੇ $\mathbf{x}^n+p_{n-1}\mathbf{x}^{n-1}+\cdots+p_0$ ਤਕਸੀਮ ਕਰਦਾ ਹੈ $\mathbf{x}^{2(n-1)}+\cdots+\mathbf{x}^2+1$ ਨੂੰ; ਇਹ $\binom{n-1}{n/2}$ ਖਾਸ ਪੌਐਂਟਸ p ਲਈ $\mathrm{aff}(P)$ ਦੀ ਕੋਡਾਈਮੈਨਸ਼ਨ ਇਕ ਹੈ ਅਤੇ p ਇਸ ਵਿਚ ਨਹੀਂ:- ਦਲੀਲ ਬਿਲਕੁਲ ਨੋਟ ੩੬ ਵਾਂਗ। □

ਸੋ ਕਾਸ਼! ਹੁਣ ਕਿਉਬਿਕਸ ਨੂੰ ਵੀ ਹਲ ਕਰਣ ਲਈ ਸਪੇਸ ਕਰਵਜ਼ P ਹੀ ਹਨ। ਪਰ ਡਿਗਰੀ 4 ਇਕੁਏਸ਼ਨਜ਼ ਲਈ ਹਨ $\mathbb{R}^4$ ਦੇ 3 ਖਾਸ ਪੌਐਂਟ $p=(1,0,0,0),(1,\pm\sqrt{2},2,\pm\sqrt{2})$ -- ਜੋ ਜੁੜੇ ਹਣ $\mathbf{x}^6+\mathbf{x}^4+\mathbf{x}^2+1$ ਦੇ 3 ਡੀਵਾਇਜ਼ਰਜ਼ $\mathbf{x}^4+1,\mathbf{x}^4\pm\sqrt{2}\mathbf{x}^3+2\mathbf{x}^2\pm\sqrt{2}\mathbf{x}+1$ ਨਾਲ -- ਜਿਨਹਾਂ ਦੇ ਕਰਵਜ਼ P ਤਿਣ ਡੀਮੈਨਸ਼ਨਲ ਚੱਪਟੇਆਂ ਵਿਚ ਹਨ। ਅਤੇ ਹਾਂ! $n=2$ ਲਈ ਇਕਲੌਤਾ ਖਾਸ ਪੌਐਂਟ p ਦਿੰਦਾ ਹੈ ਕਵਾਡਰੇਟਿਕ $\mathbf{x}^2+u_1\mathbf{x}+u_0=0$ ਨੂੰ ਹਲ ਕਰਦਾ ਸਰਕਲ ਮੈਥੱਡ:- ਪਲੇਨ $\mathbb{R}^2$ ਵਿਚ ਬਣਾਓ $p=(0,1)$ ਵਿਚੋਂ ਲੰਘਦਾ ਸਰਕਲ ਜਿਹਦਾ ਸੈਂਟਰ (u_0,u_1) ਹੈ ਅਤੇ ਨੋਟ ਕਰੋ ਓਹਦੇ ਲਾਇਨ $P(\alpha)=(-1,-2\alpha)$ ਉੱਤੇ ≤ 2 ਕਟ "α"। □ ਪਰ ਨਾ ਭੁਲੀਏ! ਆਪਾਂ ਕੋਲ ਓਹ ਸਕੂਲੇ ਸਿਖੇਆ ਵਰਗ ਪੂਰਤੀ - ਦੇਖੋ ਤਸਵੀਰ - ਵਾਲਾ ਤਰੀਕਾ ਵੀ ਹੈ ਕਵਾਡਰੇਟਿਕਸ ਲਈ।

੩੯. ਐਂਵੈਂ ਹੀ ਅਸੀ ਦ੍ਰਿਸ਼ਤ ਕੀਉਬ ਪੂਰਤੀ ਅਤੇ ਅੱਗੇ n-ਕੀਉਬ ਪੂਰਤੀ ਵੀ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਕੁਝ ਓਖੇ ਅਸੀ ਅਧਿਆਂ ਕਿਉਬਿਕਸ ਤਾਂ ਇੰਜ ਹਲ ਕਰ ਲਿਤੀਆਂ ਸਨ, ਪਰ ਪਹਲੀ ਨਜ਼ਰੇ ਜਾਪਦੈ ਕਿ $n>3$

ਲਈ ਇਸ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਕੁਝ ਖਾਸ ਹੱਥ ਨਹੀਂ ਲੱਗੇਗਾ। ਹਾਂ, ਦੂਜੀ ਟੱਰਮ ਨੂੰ ਜ਼ਰੂਰ ਹਮੇਸ਼ਾਂ ਗੁਲ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਅਸੀ ਐਂਵੈਂ। ਪਰ ਪਾਰਟੀ ਤੋ ਅਭੀ ਸ਼ੁਰੂ ਹੁਈ ਹੇ! ਇਹ ਸਕੂਲੀ ਯੁਕਤੀ ਹੀ ਦਰਵਾਜ਼ਾ ਹੈ ਸਪੇਸ ਓਫ਼ ਇਕੁਏਸਨਜ਼ ਦੀਆਂ ਮੂਲ ਸੀਮੀਟਰੀਜ਼ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਲਈ।

ਮਸਲਨ, ਰੀਅਲ ਲਾਇਨ ਦੇ ਮੋਸ਼ਨਜ਼ $x \mapsto \pm x + t$ ਐਕਟ ਕਰਦੇ ਹਨ ਸਪੇਸ ਓਫ਼ ਓਲ ਇਕੁਏਸ਼ਨਜ਼ ਉੱਤੇ ਸਬਸਟੀਚੁਸ਼ਨਜ਼ $\mathtt{x} \mapsto \pm\mathtt{x} + t$ ਰਾਂਹੀ, ਅਤੇ ਇਸ ਐਕਸ਼ਨ ਦੇ ਓਰਬਿਟ ਵੀ ਅਸੀਂ ਕੈਲਕੁਲੇਟ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਵਰਤਦੇ ਹੋਏ $(a+b)^n = \sum \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$:- ਯਾਣੀ ਕਿ ਜਮਾਂ ਅਤੇ ਜ਼ਰਬ ਵਿਚ ਮੂਲ ਰਿਸ਼ਤਾ ਜੋ ਚਿਤਰ ਵਿਚ ਬੇਬੀ ਅਲਜਬਰਾ ਸਿਧ ਕਰ ਰਹੀ ਹੈ। □

ਸਾਰਿਆਂ $\mathbb{R}^n$ ਦੀਆਂ ਫ਼ੰਡਾਮੈਂਟਲ ਸਤਰਾਂ ਅੱਗੇ ਇਹ ਐਕਸ਼ਨ ਦੇ ਓਰਬਿਟਸ ਵਿਚ ਵਿਭਾਜਿਤ ਹੋ ਜਾਂਦਿਆਂ ਹਨ:- ਕਿਉਂਕਿ ਜੇ ਪੁਰਾਣੀ ਇਕੁਏਸ਼ਨ ਦੇ $n - 2k$ ਵੱਖਰੇ ਰੀਅਲ ਰੂਟਸ ਸਨ, ਤਾਂ ਨੰਵੀ ਇਕੁਏਸ਼ਨ ਦੇ ਵੀ ਬਿਲਕੁਲ ਏਣੇ ਹੀ ਹਨ। □

ਐਪਰ, "ਸਾਰੇ ਰੂਟਸ ਬਰਾਬਰ" ਵਾਲੀ ਸਤਰ ਵਿਚ ਇਕ ਹੀ ਓਰਬਿਟ ਹੈ, ਅਤੇ ਇਹ ਕਸਪਾਇਡਲ ਕਰਵ ਰੀਸਕੇਲਿੰਗ ਤਕ ਇਕ ਮੋਮੈਂਟ ਕਰਵ ਹੈ:- ਕਿਉਂਕਿ $\mathtt{x}^n + u_{n-1}\mathtt{x}^{n-1} + \cdots + u_1\mathtt{x} + u_0 = (\mathtt{x} - t)^n$ ਦਿੰਦਾ ਹੈ $u_i(t) = (-1)^{n-i}\binom{n}{i}t^{n-i}, 0 \le i \le n-1, t \in \mathbb{R}.$ □

ਇਸ ਕਰਵ ਨੂੰ "α" ਤੇ ਚੁੰਮਦਾ ਹਾਈਪਰਪਲੇਨ @ ਹੈ :- ਇੰਟਰਸੈਕਸ਼ਨਜ਼ $\alpha^n + u_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + u_0 = 0$ ਦੇ ਕਰਵ ਨਾਲ ਲੱਭਣ ਲਈ ਪੁਟ $u_i = (-1)^{n-i}\binom{n}{i}t^{n-i}$ ਅਤੇ t ਲਈ ਹਲ ਕਰੋ। ਕਿਉਂਕਿ ਇਹ ਦਿੰਦਾ ਹੈ $(\alpha - t)^n = 0$, @ ਕਰਵ ਨੂੰ n ਵਾਰ ਕੱਟਦਾ ਹੈ $t = \alpha$ ਤੇ। □

ਸੋ, ਇਹ ਇਕਲੌਤੀ ਕਰਵ ਨਾਂ ਸਿਰਫ਼ $\mathbb{R}^n$ ਦੀ ਸਾਰੀ ਫ਼ੰਡਾਮੈਂਟਲ ਪਾਰਟੀਸ਼ਨ, ਪਰ ਇਹਦੇ ਉੱਤੇ ਸਾਰੇ ਰਿਅਲ ਰੂਟਸ ਦਾ ਗਰਾਫ਼ G ਵੀ ਫ਼ਿਕਸ ਕਰ ਦਿੰਦੀ ਹੈ:- ਇਹ ਗਰਾਫ਼ $G \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ ਡਿਸਜੌਐਂਟ ਯੁਨਿਅਣ ਹੈ ਹਰ ਟਾਇਮ $t \in \mathbb{R}$ ਚੋਂ ਲੰਘਦੇ ਚੱਪਟੇਆਂ ਦਾ ਜੋ ਕਰਵ ਦੇ ਪੋਐਂਟ "t" ਉੱਤੇ ਓਹਨੂੰ ਚੁੰਮਦੇ $\mathbb{R}^n$ ਦੇ ਹਾਈਪਰਪਲੇਨਜ਼ ਦੇ ਪੈਰੇਲਲ ਹਨ। ਓਹ ਮੈਕਸੀਮਲ ਓਪੈਣ ਸੈਟ ਜਿਨਹਾਂ ਉੱਤੇ $G \to \mathbb{R}^n$ ਦੇ ਫ਼ਾਈਬਰਜ਼ ਦੀ ਸੰਖੇਆ n, $n-2$, ਆਦਿ ਹੈ, $\mathbb{R}^n$ ਦੇ ਫ਼ੰਡਾਮੈਂਟਲ ਪਾਰਟਸ ਹਨ। □

ਇਹ ਕਿ, ਹਰ $\odot \in \mathbb{R}^n$ ਦੇ ਰੀਅਲ ਰੂਟ α ਆਪਾਂ ਪੜ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਇਹਦੇ ਵਿਚੋਂ ਲੰਘਦੇ ਅਤੇ ਉੱਤਲੀ ਕੱਸਪਾਇਡਲ ਕਰਵ ਨੂੰ ਚੁੰਮਦੇ ਹਾਈਪਰਪਲੇਨਜ਼ ਤੋਂ, ਜੈਨੇਰੇਲਾਇਜ਼ ਕਰਦਾ ਹੈ ਕੁਝ ਨੋਟ ੨੮ ਵਿਚ ਦਿਤੀ ਖੱਯਾਮ ਦੇ ਤਰੀਕੇ ਦੀ ਕਮਜ਼ੋਰ ਜੈਨੇਰਲਆਈਜ਼ੇਸ਼ਨ:- ਕਿਉਂਕਿ ਜੇ $\alpha \neq 0$ ਤਾਂ $@\cap\mathbb{R}^{n-1}$ ਚੁੰਮਦਾ ਹੈ ਓਹ "ਲਾਲ ਕਰਵਜ਼" ਨੂੰ ਓਹਨਾਂ ਦੇ "α" ਤੇ। □

ਸੋ "ਰੂਟਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਜ਼ੀਰੋ" ਤਿਆਗਣ ਦੇ ਫ਼ਲਸਰੂਪ ਅਸੀਂ ਓਹ ਦੋ ਨੋਕਦਾਰ "ਲਾਲ ਕਰਵਜ਼" ਦੀ ਜਗਹ ਹੁਣ ਇਕੋ ਸੋਹਣੀ ਸਮੂਦ ਕਸਪਾਇਡਲ ਕਰਵ ਇਸਤਮਾਲ ਕਰਣ ਲਗ ਪਏ ਹਾਂ। ਅਗੇ ਇਹ ਕਰਵ, ਦਰਅਸਲ, ਕੋਈ ਵੀ ਓਰਬਿਟ ਜੈਨੇਰੇਟ ਕਰਦੇ ਹਨ ਇਨਵੋਲੂਸ਼ਨਜ਼ $\mathtt{x} \mapsto -\mathtt{x} + 2\alpha$:- ਕਿਉਂਕਿ ਲਾਇਨ ਦੇ ਮੋਸ਼ਨ ਜੈਨੇਰੇਟ ਕਰਦੇ ਹਨ ਇਹਦੇ ਰੀਫ਼ਲੈਕਸ਼ਨ $x \mapsto -x + 2\alpha$। □ ਇਹ ਇਨਵੋਲੂਸ਼ਨਜ਼ $\tilde{\alpha}$ ਹਾਈਪਰਪਲੇਨਜ਼ @ ਨੂੰ ਪਰੀਜ਼ਰਵ ਕਰਦੇ ਹਨ:- ਕਿਉਂਕਿ t ਓਦੋਂ ਤੇ ਓਦੋਂ ਹੀ $\odot$ ਦਾ ਰੂਟ ਹੈ ਜਦੋਂ $-t + 2\alpha$ ਰੂਟ ਹੈ $\tilde{\alpha}(\odot)$ ਦਾ। □ ਪਰ ਇਹ ਓਰਡਰ ਦੋ ਦੇ ਨੋਨ ਲੀਨੀਅਰ ਮੈਪ $\mathbb{R}^n$ ਦੇ ਰੀਫ਼ਲੈਕਸ਼ਨ ਨਹੀਂ ਹਨ, ਅਤੇ n ਈਵਨ ਲਈ ਤਾਂ $\tilde{\alpha}$ ਦੇ ਫ਼ਿਕਸਡ ਪੌਐਂਟ @ ਦੇ ਅੰਦਰ ਵੀ ਨਹੀਂ ਹਨ:- ਕੋਈ ਇਕੁਏਸ਼ਨ ਓਦੋਂ ਤੇ ਓਦੋਂ ਹੀ ਫ਼ਿਕਸਡ ਹੈ ਜੇ ਓਹਦੇ ਰੂਟ ਸੀਮੀਟਰਿਕ ਹਨ α ਦੋਆਲੇ। □ ਸੋ ਜੇ ਕੋਈ ਡਿਸਟੈਂਸ ਹੈ ਵੀ ਜੋ ਇਨਵੇਰੀਐਂਟ ਹੈ ਇਹ ਸਭ ਇਨਵੋਲੂਸ਼ਨਜ਼ ਥੱਲੇ, ਲਗਦਾ ਨਹੀਂ ਕਿ ਓਹ ਬਹੋਤੀ ਮਦਦ ਕਰੇਗਾ ਇਸ ਚੁੰਮਦੇ ਹਾਈਪਰਪਲੇਨਜ਼ ਨਾਲ ਇਕੁਏਸ਼ਨਾਂ ਨੂੰ ਹਲ ਕਰਨ ਦੇ ਤਰੀਕੇ ਵਿਚ।

੪੦. ਸੈਗਮੈਂਟਸ ਦੀ ਜਮਾ ਅਤੇ ਜ਼ਰਬ ਅਤੇ ਇਹਣਾਂ ਦੇ ਡਿਸਕਰੀਟ ਰੂਪ - ਜੋ ਇਕ ਬਲੋਕਸ ਨਾਲ ਖੇਲਦਾ ਬਾਲ ਵੀ ਭਾਂਪ ਸਕਦੈ - ਵਿਚ ਕੋਈ ਅੰਤਰ ਨਹੀਂ ਜੇ ਆਪਾਂ ਨੂੰ ਕੋਈ ਇਤਰਾਜ਼ ਨਹੀਂ $30.199... = 30.2$ ਆਦਿ ਨਾਲ, ਦੇਖੋ PG&R-V, note (30.199...)[ਇਸ ਖਿਆਲ ਤੋਂ ਚਲਦੇ ਹੀ ਅਸੀ ਜਮਾ ਅਤੇ ਜ਼ਰਬ ਵਿਚ ਮੂਲ ਰਿਸ਼ਤੇ ਨੂੰ ਸਪੇਸ ਓਫ਼ ਡਿਗਰੀ n ਰੀਅਲ ਇਕੁਏਸ਼ਨਜ਼ ਦੇ ਇਕ ਸਟੈਡੀ ਮੋਸ਼ਨ ਵੱਜੋਂ ਦੇਖਨਾ ਸ਼ੁਰੁ ਕਰ ਦਿਤਾ ਸੀ। ਪਰ ਆਹ ਕੀ ਜਾਦੂ ! ਇਸ ਸਟੈਡੀ ਮੋਸ਼ਨ ਦੇ ਹੀ ਇਕ ਓਰਬਿਟ ਤੋਂ ਹੀ ਉੱਤਪਣ ਹੋ ਰਹੇ ਹਨ ਫ਼ੰਡਾਮੈਂਟਲ ਪਾਰਟੀਸ਼ਨ ਦੇ ਸਾਰੇ ਮੈਨੀਫ਼ੋਲਡ। ਸੋ ਕੁਦਰਤੀ ਹੈ ਹੁਣ ਸਵਾਲ : ਕਿ ਇਹਦਾ PG&R ਦੀ ਕਾਰਟੀਸ਼ੀਅਨ ਕਰੀਏਸ਼ਨ ਨਾਲ ਕੋਈ ਤੱਲੁਕ ਹੈ ? (ਪਰ ਯਾਦ ਰਹੇ ਕਿ ਇਹਦੇ ਵਿਚ ਇਸਤਮਾਲ ਕੀਤੇ ਗਏ "ਕਾਰਟੀਸ਼ੀਅਣ ਮੋਸ਼ਨਜ਼" ਬਿਲਕੁਲ ਹੀ ਅਨਸਟੈਡੀ ਸਨ; ਸੋ ਨਿਚੇ ਨੋਟ ੪੨, ੪੩, ਵਗੈਰਾ ਵਿਚ

ਅਸੀਂ ਜੋ ਐਸੈ ਕੁਝ ਮੋਸ਼ਨਜ਼ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਾਂਗੇ, ਓਹਨਾਂ ਦਾ ਇਹ ਸਟੈਡੀ "ਬੇਬੀ ਮੋਸ਼ਨ" ਨਾਲ ਕੋਈ ਸਿਧਾ ਭੌਤਿਕ ਨਾਤਾ ਨਹੀਂ।) ਪਰ ਅੱਗੇ ਜਾਣ ਤੋਂ ਪਹਲਾਂ ਇਕ ਗਲ ਮਨ ਲੈਣੀ ਚਾਹਿਦੀ ਹੈ। ਸੱਚ ਪੁਛੋ ਤਾਂ ਇਕੋ ਪਾਰਟ, ਸਿਰਫ਼ n-ਸਵੈਲੋਟੇਲ, ਨੂੰ ਹੀ ਓਰਬਿਟ ਨੇ ਕਰੀਏਟ ਕੀਤਾ ਸੀ, ਦੂਜੇਆਂ ਲਈ ਅਸੀਂ ਕੋਮਪਲੈਕਸ ਨੰਬਰਾਂ ਦੀ ਛੁਪੀ ਵਰਤੋਂ ਕੀਤੀ ਸੀ:- ਚੁੰਮਦੇ ਹਾਈਪਰਪਲੇਨ ਸਿਰਫ਼ ਰੀਅਲ ਰੂਟ ਦਿੰਦੇ ਨੇ, ਜੋ ਹਮੇਸ਼ਾਂ $\odot$ ਦਾ ਸਟਰਾਟਮ ਫ਼ਿਕਸ ਨਹੀਂ ਕਰਦਾ। ਜਿੰਵੇ ਕਿ ਇਕ ਡਿਗਰੀ 4 ਇਕੁਏਸ਼ਨ ਦੇ ਅਗਰ ਦੋ ਅਲਗ ਰੂਟ r ਅਤੇ s ਹਨ ਤਾਂ ਮੁਮਕਿਣ ਓਹਦੇ ਰੂਟ $\{r, r, s, s\}$ ਆਦਿ ਯਾਂ $\{r, s, a \pm b\}$ ਹੋ ਸਕਦੇ ਨੇ, ਪਰ ਹਾਂ ਸਿਰਫ਼ ਆਖਰੀ ਇਕੁਏਸ਼ਨ ਇਕ ਓਪਨ ਸਟਰਾਟਮ ਵਿਚ ਹੈ। □ ਸੋ ਸਵਾਲ ਆਪਾਂ ਬਦਲ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ : ਕਿ ਸਵੈਲੋਟੈਲ ਦਾ ਇਕੋ ਓਰਬਿਟ ਤੋਂ ਬਣਨਾ ਅਤੇ ਕਾਰਟੀਸ਼ੀਅਨ ਰਚਨਾ ਵਿਚ ਸੰਬੰਧ ਹੈ; ਅਤੇ ਜੇ ਹਾਂ, ਕਿ ਇਹ ਓਰਬਿਟ ਫ਼ਾਇਨਾਇਟ ਟਾਮਿਜ਼ ਵਿਚ ਓਹਦੇ ਅੰਦਰ ਕਲੋਜ਼ਡ ਸਬਮੈਨੀਫ਼ੋਲਡ ਵੀ ਰੱਚ ਸੱਕਦੀ ਹੈ, ਜੋ ਅੱਗੇ PG&R-V, note 28 ਵਾਂਗ ਆਪਣੀਆ ਜਿਓਣਾਂ ਜਿੰਦੇ ਨੈ ?

੪੧. ਕੌਮਪਲੈਕਸ ਨੰਬਰਾਂ ਵਿਚ ਬਹੁਤ ਧਨ ਹੈ, ਰਾਹ ਤੋਂ ਭਟਕਾਣ ਵਾਲਾ ਧਨ! ਭਟਕਣ ਤੋਂ ਬੱਚਣ ਲਈ ਆਪਣਾ ਫ਼ੋਕਸ ਰੀਅਲ ਸਵੈਲੋਟੇਲ ਯਾਂ ਹਦ ਇਹਦੇ ਕਲੋਯਰ ਉੱਤੇ ਰਖਣਾ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਇਹ ਕਲੋਜ਼ਡ ਸਬਸੈਟ $\mathbb{R}P^n \subset \mathbb{C}P^n$ ਦਾ ਹੀ ਮੂਲ ਜਾਪਦੈ। ਪਰ ਤਾਂ ਵੀ ਨੋਟ ਕਰਣਾ ਬਣਦਾ ਹੈ ਕਿ

ਨੋਟ ੩੯ ਦੇ ਤਰੀਕੇ ਨੂੰ ਕੋਮਪਲੈਕਸੀਫ਼ਾਈ ਕਰਕੇ ਅਸੀਂ ਸਭ ਇਕੁਏਸਨਾਂ ਹਲ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ:- ਕੋਈ n ਪੌਐਂਟ ਕਸਪਾਈਡਲ ਕਰਵ ਦੇ ਮੁਕੱਰਰ ਕਰਦੇ ਹਨ ਇਕੁਏਸ਼ਨ $\odot$ ਸਵੈਲੋਟੇਲ ਦੀ ਜਿਹਦੇ ਰੂਟ ਓਹ ਹਨ, ਅੱਤੇ $\odot$ ਚੋਂ ਲੰਘਦੇ ਤੇ ਕਰਵ ਨੂੰ ਚੁੰਮਦੇ ਹਾਈਪਰਪਲੇਨ ਵਾਪਸ ਇਹ ਪੌਐਂਟ ਦੇ ਦਿੰਦੇ ਨੇ। ਕਸਪਾਈਡਲ ਕਰਵ ਦੇ ਕਲੋਯਰ ਵਿਚ ਸਿਰਫ਼ ਇਕ ਹੋਰ ਪੌਐਂਟ ∞ ਹੈ, ਹੋਮੋਜੀਨਸ ਇਕੁਏਸ਼ਨ $\mathtt{x}$ ਅਤੇ $\mathtt{y}$ ਦੀ ਜਿਹਦੇ ਸਾਰੇ ਰੁਟ ਇਨਫ਼ੀਨੀਟੀ ਤੇ ਹਨ। ਤਾਂਹੀਂ, ਕਲੋਜ਼ਡ n-ਸਵੈਲੋਟੇਲ--ਸਾਰੀਆਂ ਰੀਅਲ ਡਿਗਰੀ n ਹੋਮੋਜੀਨਸ ਇਨ $\mathtt{x}$ ਐਂਡ $\mathtt{y}$ ਇਕੁਏਸ਼ਨਜ਼ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਸਬ ਰੁਟ ਰੀਅਲ ਹਨ--ਦੀ ਟੋਪੋਲੋਜੀ ਸਰਕਲ ਦੇ nਥ ਸੀਮੀਟਰਿਕ ਪਾਵਰ $\mathrm{Sym}^n(S^1)$ ਵਾਲੀ ਹੈ। ਪਰ, ਫ਼ੰਡਾਮੈਂਟਲ ਥੀਓਰਮ ਓਫ਼ ਅਲਜਬਰਾ ਕਹੰਦੀ ਹੈ ਕਿ ਇਹਦੀ ਕੌਮਪਲੈਕਸੀਫ਼ਿਕੇਸ਼ਨ ਹੈ $\mathbb{C}P^n$, ਅੱਤੇ ਕੋਮਪਲੈਕਸੀਫ਼ਾਈਡ ਕਲੋਜ਼ਡ ਕਸਪਾਈਡਲ ਕਰਵ ਹੈ ਇਕ 2-ਸਫ਼ਿਅਰ $\mathbb{C} \cup \infty = S^2$। ਸੋ, ਕੋਮਪਲੈਕਸ ਪਰੋਜੈਕਟਿਵ ਹਾਈਪਰਪਲੇਨ ਜੋ $\odot \in \mathbb{C}P^n$ ਚੋਂ ਲੰਘਦੇ ਇਹ ਕੋਮਪਲੈਕਸ ਪਰੋਜੈਟਿਵ ਕਰਵ $S^2 \subset \mathbb{C}P^n$ ਨੂੰ ਚੁੰਮਦੇ ਨੇ ਓਹ $\odot$ ਨੂੰ ਹਲ ਕਰਦੇ ਨੇ, ਯਾਣੀ ਕਿ, ਇਨਵਰਸ ਫ਼ੰਡਾਮੈਂਟਲ ਹੋਮੀਓਮੋਰਫ਼ਿਜ਼ਮ $\mathbb{C}P^n \to \mathrm{Sym}^n(S^2)$ ਦਿੰਦੇ ਹਨ। □

ਸੋ ਆਪਾਂ ਮੁੜ ਓਥੇ – PG&R-V, footnote 20 – ਹਾਂ ਜਿੱਥੋਂ ਇਹ "ਪੀ ਜੀ ਐਂਡ ਆਰ" ਦੀ ਹੁਣ ਵਡੀ ਅਲਜਬਰਾਇਕ ਟਾਹਨੀ ਫ਼ੁਟੀ। ਇਸ ਕਾਰਟੀਸੀਅਨ ਜਨਮ ਉਪਰਾਂਤ FTA ਨੇ ਕੋਮਪਲੈਕਸ ਨੰਬਰਾਂ ਦੇ ਕਥਿਤ ਜਾਦੂ ਯਾਂ ਆਪਾਰ ਧਨ ਦਾ ਭੇਦ ਖੋਲ ਦਿਤਾ ਸੀ। ਗਲ੍ਹ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਇਹਨਾਂ ਦੀ ਡਾਈਮੈਨਸ਼ਨ $m = 2$ ਓਹ ਇਕਲੌਤੀ ਡਾਈਮੈਨਸ਼ਨ ਇਹ ਜਿਸ ਦੇ ਮੈਨੀਫ਼ੋਲਡਾਂ ਦੇ ਸੀਮੀਟਰਿਕ ਪਾਵਰਜ਼ ਵੀ ਮੈਨੀਫ਼ੋਲਡਜ਼ ਹਨ। ਪਰ ਇਸ ਲਿਹਾਜ ਨਾਲ ਰਿਅਲ ਨੰਬਰਾਂ ਦੀ ਡਾਈਮੈਨਸ਼ਨ $m = 1$ ਥੋੜੀ ਹੀ ਮਾੜੀ ਹੈ। ਇਸ ਡਾਈਮੈਨਸ਼ਨ ਦੇ ਮੈਨੀਫ਼ੋਲਡਜ਼ ਦੇ ਸੀਮੀਟਰਿਕ ਪਾਵਰਜ਼ ਮੈਨੀਫ਼ੋਲਡਜ਼ ਤਾਂ ਨਹੀਂ ਪਰ ਮੈਨੀਫ਼ੋਲਦਜ਼-ਵਿਦ-ਬਾਉਂਡਰੀ ਹਨ। ਅੱਗਲੇ ਪਰਚੇ aft FTA ਵਿਚ ਅਸੀਂ ਕਈ ਹੋਰ ਚੀਜ਼ਾ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਇਸ ਡਾਈਮੈਨਸ਼ਨ ਦੇ ਇਕਲੌਤੇ ਕਲੋਜ਼ਡ ਮੈਨੀਫ਼ੋਲਡ S^1 ਦਿਆਂ ਇਹ ਪਾਵਰਜ਼ $\mathrm{Sym}^n(S^1)$ ਦੀ ਟੋਪੋਲੋਜੀ ਵੀ ਸਮਝ ਲਿਤੀ ਸੀ। ਓਧਰ ਡਾਈਮੈਨਸ਼ਨ $m = 2$ ਦੇ ਇਨਫ਼ਾਇਨਾਇਟ ਕਲੋਜ਼ਡ ਮੈਨੀਫ਼ੋਲਡ M^2 ਹਨ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਸਭ ਦੀਆਂ ਸੀਮੀਟਰਿਕ ਪਾਵਰਜ਼ $\mathrm{Sym}^n(M^2)$ ਦੀ ਟੋਪੋਲੋਜੀ ਬਾਰੇ ਅਜੇ ਵੀ ਸਭ ਕੁਝ ਨਹੀਂ ਪਤਾ। ਅਸੀਂ FTA ਵਿਚ ਕਿਸੀ ਵੀ m ਲਈ ਇਹ ਪਾਵਰਜ਼ $\mathrm{Sym}^n(\mathbb{R}^m)$ ਦੀ ਟੋਪੋਲੋਜੀ ਕੌਮਪਿਊਟ ਕਿਤੀ ਸੀ। ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ $m = 4$ ਅਤੇ $m = 8$ ਲਈ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਨੌਨ ਸਿੰਗੁਲਰ ਪੌਐਂਟਸ ਕਿਸੀ ਅਰਥਾਂ ਵਿਚ ਕੋਟਰਨੀਓਨਿਕ ਅਤੇ ਓਕਟੋਨੀਓਨਿਕ ਸਵੈਲੋਟੇਲਜ਼ ਹਨ ?

੪੨. ਪਰਤਦੇ ਸਵਾਲ ਨੂੰ ਜੋ ਨੋਟ ੪੦ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿਚ ਹੈ, ਇਕ ਜਵਾਬ ਤਾਂ ਇਹ ਹੈ। ਕੋਈ ਕਾਰਟੀਸ਼ੀਅਨ ਮੋਸ਼ਨ ਜਿਹਦੇ ਵਿਚ ਕੀਸੀ ਵੀ ਟਾਇਮ ਹਦ ਇਕ ਰੂਟ ਹਿਲਦਾ ਹੈ, ਅਤੇ ਕਦੇ ਨਾਂ ਕਦੇ ਹਿਲਦਾ ਵੀ ਜ਼ਰੂਰ ਹੈ ਆਪਣੀ ਪਛਾਣ ਖੋਏ ਬਗੈਰ, ਸਵੈਲੋਟੇਲ ਨੂੰ ਰੱਚਦਾ ਹੈ:- ਕੋਈ ਇਕੁਏਸ਼ਨ ਸਵੈਲੋਟੇਲ ਦੀ, ਇੰਟਰਸੈਕਸ਼ਨ $\alpha_1 \cap \ldots \cap \alpha_n$ ਹੈ ਓਹ n ਚੁੰਮਦੇ ਹਾਈਪਰਪਲੇਨਜ਼ ਦਾ ਜੋ ਓਹਨੂੰ ਹਲ ਕਰਦੇ ਨੈ। ਇਕੋ ਨੂੰ ਖਾਰਿਜ ਕਰਕੇ ਮਿਲਦੀਆਂ ਹਨ, n ਲਾਇਣਾਂ $\alpha_1 \cap \ldots \cap \hat{\alpha_j} \cap \ldots \cap \alpha_n$ ਲੰਘਦਿਆਂ ਸਵੈਲੋਟੇਲ ਦੇ ਹਰ ਪੌਐਂਟ $\odot$ ਵਿਚੋਂ। ਅੱਗੇ, ਇਹਨਾਂ ਚੋਂ ਕੋਈ ਵੀ ਲਾਇਨ ਦੇ $n - 1$ ਪੌਐਂਟ ਹੀ ਐਸੈ ਹਨ ਜੋ ਸਵੈਲੋਟੇਲ ਵਿਚ ਨਹੀਂ, ਇਹ

ਹਨ ਓਹ ਜਿਥੇ ਹਿਲਦਾ ਰੂਟ ਅਪਣੀ ਪਛਾਣ ਖੋ ਬੈਠਦਾ ਹੈ, ਅਤੇ ਕੋਈ ਖਲੋਤੇ ਰੂਟ $\alpha_i, i \neq j$ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਸੋ, ਮਨਫ਼ੀ ਕਰਕੇ ਇਹ $n-1$ ਪੌਐਂਟ, ਜਿਥੇ ਲਾਇਨ ਬਾਉਂਡਰੀ ਦੀ ਉਤਲੀ ਸਤਰ ਨਾਲ ਟੈਂਜੈਂਟ ਹੈ, ਬੱਚਦੇ ਹਨ ਓਹਦੇ n ਹਿਸੇ ਜੋ ਸਵੈਲੋਟੇਲ ਅੰਦਰ ਰਹੰਦੇ ਨੇ। ਜਦੋਂ ਕੋਈ $\odot$ ਹਿਲਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਜੋ ਓਹਦੇ ਵਿਚੋਂ n ਰੇਖਾਂਵਾ ਗੁਜ਼ਰਦਿਆਂ ਹਨ, ਓਹਨਾਂ ਚੋਂ ਇਕ ਰੇਖਾ ਉੱਤੇ ਆਪਣੇ ਹਿਸੇ ਉੱਤੇ ਹੀ ਹਿਲਦਾ ਹੈ। ਅੱਗੇ ਆਪਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਕਦੇ ਨਾ ਕਦੇ ਇਹਨਾਂ n ਵਿਚੋਂ ਹਰ ਰੇਖਾ ਉੱਤੇ ਹਿਲੇਗਾ ਜ਼ਰੂਰ। ਸੋ ਮਿਨੀਮਲ ਸੈਟ -- ਯਾਣੀ ਕਿ ਇਕ ਸਬ ਤੋਂ ਛੋਟਾ ਸੈਚੁਰੈਟਿਡ ਯੁਨਿਅਣ ਕਾਰਟੀਸ਼ੀਅਨ ਮੋਸ਼ਨ ਦੇ ਓਰਬਿਟਸ ਦਾ -- ਕੋਈ ਵੀ $\odot$ ਦਾ, ਜਿਹਦੇ n ਵਖਰੇ ਰੀਅਲ ਰੂਟ ਹਨ, ਯੂਨੀਅਣ ਹੈ ਸਾਰਿਆਂ ਲਾਈਨਾਂ ਦੇ ਸਾਰੇਆਂ ਹਿਸੇਆ ਦਾ, ਯਾਣੀ ਕਿ, ਓਹ ਸਾਰੇ ਦੀ ਸਾਰੀ ਸਵੈਲੋਟੇਲ ਹੀ ਹੈ। □

੪੩. ਐਸਾ ਮੋਸ਼ਨ ਸਵੈਲੋਟੇਲ ਦੀ ਬਾਉਂਡਰੀ ਦਿਆਂ ਸਾਰਿਆਂ ਸਤਰਾਂ ਵੀ ਰੱਚਦਾ ਹੈ:- ਸਿੰਮਪਲ ਰੂਟਸ ਦੀ "ਪਛਾਣ" ਸੀ ਓਹਣਾਂ ਦੀ ਸਿੰਮਪਲੀਸੀਟੀ, ਕਿਸੀ ਵੀ ਰੂਟ ਦੀ ਪਛਾਣ ਹੈ ਓਹਦੀ ਮਲਟੀਪਲੀਸੀਟੀ। ਸੱਤਰ ਕਿਸੀ $\odot$ ਦੀ, ਜਿਹਦੇ ਸਬ ਰੂਟ ਰੀਅ਼ਲ ਹਨ, ਮੁਕੱਰਰ ਕਰਦਾ ਹੈ ਓਹਦਾ ਟਾਇਪ, ਸੀਕੁਐਂਸ ਓਹਦੇ ਸੱਭ ਤੋਂ ਛੋਟੇ ਤੋਂ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਡੇ ਰੂਟਾਂ ਦਿਆਂ ਮਲਟੀਪਲੀਸੀਟੀਜ਼ ਦਾ। ਇਹ ਕਿ, ਹਦ ਇਕ ਰੂਟ ਹੀ ਹਿਲਦਾ ਹੈ ਆਪਣੀ ਮਲਟੀਪਲੀਸੀਟੀ ਕਾਇਮ ਰੱਖਦਾ ਹੋਏਆ, ਡਿਫ਼ਾਇਨ ਕਰਦਾ ਹੈ ਹਰ ਸਤਰ ਵਿਚ ਮੈਕਸੀਮਲ ਕਰਵਡ ਓਪੈਣ ਇੰਟਰਵਲਜ਼, ਓਣੇ ਹਰ ਪੌਐਂਟ ਚੋਂ ਜਿਨੇ ਓਹਦੇ ਵੱਖਰੇ ਰੂਟ ਹਨ। ਹੋਰ ਆਪਾਂ ਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ ਕਦੇ ਨਾ ਕਦੇ ਪੌਐਂਟ ਆਪਣੇ ਵਿਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਹਰ ਇਹ ਇੰਟਰਵਲ ਉੱਤੇ ਹਿਲੇਗਾ ਜ਼ਰੂਰ। ਫ਼ਲਸਰੂਪ, ਕਿਸੀ $\odot$ ਦਾ ਮਿਨੀਮਲ ਸੈਟ ਓਹਦਾ ਸਾਰਾ ਸਟਰੈਟਮ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ, ਬਾਵਜੂਦ ਇਸਦੇ ਕਿ ਇਕ ਓਰਬਿਟ--ਯਾਣੀ ਕਿ $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ ਥਲੇ ਇਕ ਫ਼ਲੋ ਲਾਇਨ ਦਾ ਇਮੈਜ-- ਕਾਰਟੀਸ਼ੀਅਨ ਮੋਸ਼ਨ ਦਾ, ਇਕ ਕਰਵਡ ਇੰਟਰਵਲ ਤੋਂ ਵੀ ਬਹੁਤ ਛੋਟਾ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਕਦੇ ਨਾ ਕਦੇ ਕੋਈ ਖਲੋਤਾ ਪੌਐਂਟ ਆਪਣੀ ਹਰ ਇੰਨਟਰਵਲ ਵਿਚ ਥੋੜਾ ਜੇਹਾ ਹਿਲਦਾ ਹੈ, ਤਾਂਹੀ ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟਾ ਓਰਬਿਟਸ ਦਾ ਸੈਚੁਰੈਟਿਡ ਯੂਨਿਅਨ ਜਿਸ ਵਿਚ $\odot$ ਹੈ ਓਹਦਾ ਸਾਰੇ ਦਾ ਸਾਰਾ ਸਟਰੈਟਮ ਹੀ ਹੈ। □

੪੪. ਹੁਣ ਵਿਚਾਰਦੇ ਹਾਂ ਮਿਨੀਮਲ ਸੈਟ ਕੋਈ ਵੀ ਇਕੁਏਸ਼ਨ $\odot \in \mathbb{R}^n$ ਦਾ। ਕਿਉਂਕਿ ਕੋਮਪਲੈਕਸ ਕੌਂਜੁਗੇਟ ਜੋੜੇ ਵੀ ਰੂਟ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ, ਪਰ ਰੀਅ਼ਲ ਰੂਟ ਹੀ ਹਿਲਦੇ ਨੇ ਆਪਣੀ ਪੈਛਾਣ ਕਾਇਮ ਰਖਦੇ ਹੋਏ, ਇਹ ਮਿਨੀਮਲ ਸੈਟ $\odot$ ਦੇ ਸਟਰੈਟਮ ਦੀ ਇਕ ਫ਼ਿਕਸਡ ਫ਼ੋਲੀਏਸ਼ਨ ਦਾ ਪੱਤਾ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਕ ਅਤਿ ਜਦੋਂ ਕੋਈ ਰੂਟ ਰੀਅਲ ਨਹੀਂ -- ਇਹ n ਈਵਨ ਲਈ ਹੀ ਮੁਮਕਿਣ ਹੈ -- ਇਹ ਇਸ ਓਪੈਣ ਸਟਰੈਟਮ ਦੀ ਪੌਐਂਟ ਫ਼ੋਲੀਏਸ਼ਨ ਹੈ। ਦੂਜੇ ਪਾਸੇ ਜਦੋਂ ਸਾਰੇ ਰੂਟ ਰੀਅਲ ਹਨ, ਤਾਂ $\odot$ ਕਲੋਜ਼ਡ ਸਵੈਲੋਟੈਲ ਦੇ ਕਿਸੀ ਸਟਰੈਟਮ ਵਿਚ ਹੈ, ਤੇ ਇਹ ਇਹਦੀ ਇਕ-ਪੱਤੀ ਫ਼ੋਲੀਏਸ਼ਨ ਹੈ।

ਇਹ ਸੱਭ ਨੂ ਕੋਮਪਲੈਕਸੀਫ਼ਾਈ ਕਰਕੇ ਕਿ ਅਸੀਂ ਐਂਵੇਂ ਰਚ ਸਕਦੇ ਹਾਂ $\mathbb{C}^n$ ਦਾ ਕੋਈ ਵੀ ਸਬਮੈਨੀਫ਼ੋਲਡ ਜੋ ਬਣਾਂਦੀਆਂ ਹਨ ਸਭ ਇਕੁਏਸ਼ਨਜ਼ $\odot$ ਜਿਨਹਾਂ ਦੇ ਹਰ ਮਲਟੀਪਲੀਸੀਟੀ ਦੇ ਦਿੱਤੇ ਨੰਬਰ ਦੇ ਰੂਟ ਹਨ ? ਕਰ ਤੇ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਪਰ ਅਸੀਂ ਕੋਮਪਲੈਕਸ ਟਾਇਮ ਦੇ ਭੂਤ ਨੂੰ ਲਖਮੱਣ ਰੇਖਾ ਦੇ ਓਸ ਪਾਰ ਰਖਣ ਵਿਚ ਹੀ ਸਿਆਣਪ ਸਮਝਦੇ ਹਾਂ! ਮਸਲਨ, ਜੇ ਵੜ ਆਇਆ ਤਾਂ ਜਦੋਂ ਪੀਰੀਓਡੀਸੀਟੀ ਦੀ ਗੱਲ ਚੱਲੂ ਤਾਂ ਇਕਲੋਤੇ S^1 ਦੀ ਜਗਿਹ ਹੁਣ ਸਾਰੇ ਕਲੋਜ਼ਡ 2-ਮੈਨੀਫ਼ੋਲਡਜ਼ M^2 ਨਾਲ ਮੱਥਾ ਮਾਰਣਾ ਪਊ।

ਉਤੇ, ਰੀਅਲ ਟਾਇਮ ਨਾਲ ਵਫ਼ਾਦਾਰੀ ਨਿਭਾਂਦੇ ਹੋਏ ਹੀ, ਬਿਲਕੁਲ $\mathrm{PG\&R-V, note\,28}$ ਵਾਂਗ, ਅਸੀ ਸਵੈਲੋਟੇਲ ਦੇ ਅੰਦਰੁਣੀ ਸਾਰੇ ਕਲੋਜ਼ਡ ਮੈਨੀਫ਼ੋਲਡਜ਼ ਦੇ ਜਨਮ ਤੇ ਜਿਓਣ ਨੂੰ ਇਕ ਕਾਰਟੀਸ਼ੀਅਣ ਮੋਸ਼ਨ ਦਿਆਂ ਬਦਲਦਿਆਂ S^1-ਅਪਰੋਕਸੀਮੈਸ਼ਨਜ਼ ਸਮਝ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ ਅਸੀਂ $\mathbb{R}^n$ ਦੇ ਯੁਕਲੀਡੀਅਣ ਡਿਸਟੈਂਸ ਦੀ ਕੋਈ ਵਰਤੋਂ ਨਹੀਂ ਕੀਤੀ ਹੈ, ਸਿਰਫ਼ ਓਹਦੇ ਕੋਓਰਡੀਨੇਟਸ ਦੇ ਟੋਟਲ ਓਰਡਰ ਦੀ ਕਿਤੀ ਸੀ। ਦਰਅਸਲ, ਸਵੈਲੋਟੇਲ ਦੀ ਕਾਰਟੀਸ਼ੀਅਣ ਰਚਣਾ ਸੰਕੇਤ ਕਰ ਰਹੀ ਇਕ ਹੋਰ ਡਿਸਟੈਂਸ ਵਲ ਜੋ ਕਾਇਮ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ ਸਭ ਇਨਵੋਲੁਸ਼ਨਜ਼ ਥੱਲੇ, ਅਤੇ ਜੋ ਪੀ ਜੀ ਐਂਡ ਆਰ ਦੇ ਕੇਏਲੀ ਡਿਸਟੈਂਸਿਸ ਦਾ ਕਰੀਬੀ ਹੀ ਹੈ ...

੪੫. ਆਪਾਂ ਨੋਟ ੪੨ ਵਿਚ ਪੁਰਾਣੇ ਆੜੀ @ ਨੂੰ α ਹੀ ਲਿਖ ਦਿਤਾ ਸੀ ਕਿਉਂਕਿ ਗ਼ਲੱਤਫ਼ਹਮੀ ਦਾ ਕੋਈ ਖਤਰਾ ਨਹੀਂ ਸੀ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਹਨੂੰ ${}^1\alpha$ ਬਣਾ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਮੋਅਰ ਜੈਨੈਰੱਲੀ ${}^m\alpha$ ਦਾ ਭਾਵ ਹੋਵੇਗਾ ਸਬਸੈਟ ਸਾਰੀਆਂ ਇਕੁਏਸ਼ਨਜ਼ $\odot \in \mathbb{R}^n$ ਜਿਨਹਾਂ ਦਾ $\alpha \in \mathbb{R}$ ਰੂਟ ਹੈ ਮਲਟੀਪਲੀਸੀਟੀ $\geq m$ ਦਾ। ਇਹ ਇਕ ਕੋਡਾਈਮੈਨਸ਼ਨ m ਦਾ ਚਪਟਾ ਹੈ:- $(u_0, ..., u_{n-1}) \in {}^m\alpha$ ਓਦੋਂ ਤੇ ਓਦੋਂ ਹੀ ਸਹੀ ਹੈ ਜਦੋਂ $\frac{d^j}{d\alpha^j}(u_0 + u_1\alpha + \cdots + u_{n-1}\alpha^{n-1} + \alpha^n) = 0$ ਫ਼ੌਰ ਓਲ $0 \leq j < m$। ਹੁਣ ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ ਇਹ

m ਲੀਨੀਅਰ ਇਕੁਏਸ਼ਨਜ਼ ਦੇ ਕੋਐਫ਼ੀਸ਼ੈਂਟਸ ਦੀ $m \times m$ ਮੈਟਰਿਕਸ ਟਰਾਏਐਂਗੁਲਰ ਹੈ ਅਤੇ ਓਹਦਿਆਂ ਡਾਏਗਨਲ ਟਰਮਜ਼ ਹਨ $j!$, $0 \leq j < m$। □

ਇਕ ਹੋਰ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀਕੋਨ ਤੋਂ, ${}^{m}\alpha$ ਓਹ $\mathbb{R}^n$ ਦਾ ਕੋਡਾਈਮੈਨਸ਼ਨ m ਦਾ ਚਪਟਾ ਹੈ ਜੋ ਕਸਪਾਈਡਲ ਕਰਵ ਨੂੰ ਓਹਦੇ ਪੌਐਂਟ "α" ਤੇ ਚੁੰਮਦਾ ਹੈ :- ਕਿਉਂਕਿ ਇਹ ਕਰਵ ਐਸ ਚਪਟੇ ਨੂੰ $n - m + 1$ ਵਾਰ ਕਟਦੀ ਹੈ ਐਸ ਪੌਐਂਟ "α" ਤੇ। □ ਖਾਸ ਕਰ ${}^{n-1}\alpha$ ਕਸਪਾਈਡਲ ਕਰਵ ਦੀ ਟੈਂਜੈਂਟ ਲਾਇਨ ਹੈ ਓਹਦੇ ਪੌਐਂਟ "α" ਤੇ, ਅਤੇ ਪੌਐਂਟ ${}^{n}\alpha$ ਇਹ ਕਸਪ "α" ਹੀ ਹੈ।

ਓਹ "ਮੈਕਸੀਮਲ ਕਰਵਡ ਓਪੈਣ ਇੰਟਰਵਲਜ਼" ਜਿਨਹਾਂ ਦੀ ਨੋਟ ੪੩ ਵਿਚ ਵਰਤੋਂ ਹੋਈ ਸੀ ਓਹਨਾਂ ਦੇ ਏਫ਼ਾਇਨ ਸਪੈਣ ਦੀ ਡਾਈਮੈਨਸ਼ਨ ਹਿਲਦੇ ਰੂਟ ਦੀ ਮਲਟੀਪਲੀਸੀਟੀ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ :- ਅਗਰ ਕਲੋਜ਼ਡ ਸਵੈਲੋਟੇਲ ਦੇ ਪੌਐਂਟ $\odot$ ਦੇ ਵਧਦੇ ਓਰਡਰ ਵਿਚ d ਵੱਖਰੇ ਰੂਟ α_j ਹਨ ਜਿਹਨਾਂ ਦੀ ਮਲਟੀਪਲੀਸੀਟੀ ਹੈ m_j, ਤਾਂ ਓਹਦੇ ਸਟਰੈਟਮ ਦਾ ਟਾਇਪ ਹੈ $m_1 \ldots m_j \ldots m_d$ ਅਤੇ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਹੈ ਫ਼ੋਰਮੂਲਾ $\odot = {}^{m_1}\alpha_1 \cap \ldots \cap {}^{m_j}\alpha_j \cap \ldots \cap {}^{m_d}\alpha_d$। ਖਾਰਿਜ ਕਰਕੇ jਥ ਚਪਟਾ ਇਸ ਚੋਂ ਮਿਲ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਓਹ m_j ਡਾਈਮੈਨਸ਼ਨਲ ਚਪਟਾ ਜੋ ਏਫ਼ਾਇਨ ਸਪੈਣ ਹੈ ਓਸ ਮੋਮੈਂਟ ਕਰਵ ਵਰਗੀ ਕਰਵ ਦਾ ਜੋ $\odot$ ਵਾਂਹਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ ਸਿਰਫ਼ jਥ ਰੂਟ ਨੂੰ ਹਿਲਾਂਦੇ ਹਾਂ ਓਹਦੀ ਮਲਟੀਪਲੀਸੀਟੀ m_j ਕਾਇਮ ਰਖਦੇ ਹੋਏ। □

ਤਾਂਹੀ, ਜਦੋਂ ਇਕ ਸਿੰਪਲ ਰੂਟ ਹਿਲਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਕਰਵਡ ਇੰਟਰਵਲ ਦਰਅਸਲ ਸਿਧੀ ਹੈ, ਅਤੇ, ਸੱਭ ਤੋਂ ਕਰਵਡ ਕਰਵਡ ਇੰਟਰਵਲ ਕਸਪਾਈਡਲ ਕਰਵ ਹੀ ਹੈ, ਅੱਗੇ ਇਹ ਇਕਲੌਤੀ ਕਰਵਡ ਇੰਟਰਵਲ ਹੈ ਜੋ ਦੂਹਰੀ ਇਨਫ਼ਾਏਨਾਇਟ ਹੈ :- ਇਹ ਇਸ ਲਈ ਕਿ ਜੇ ਹਿਲਦੇ ਰੂਟ ਦੀ ਮਲਟੀਪਲੀਸੀਟੀ n ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ, ਤਾਂ ਓਸ ਤੋਂ ਘਟ ਯਾਂ ਵੱਧ ਇਕ ਖਲੌਤਾ ਰੂਟ ਜ਼ਰੂਰ ਹੈ। □

੪੬. ਕਿ ਦੇਕਾਰਤ--ਓਹੀਓ ਦੇਕਾਰਤ ਜਿਹਦੀ ਸਿਖੇਆ, ਕਿ ਭਿਣ ਸ਼ਕਲਾਂ ਤੇ ਪਦਾਰਥ ਸਿਰਫ਼ ਮੋਸ਼ਨ ਦੇ ਅਲਗ ਅਲਗ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹਨ, ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਅਪਣਾਂ ਲਿਆ ਹੈ--ਨੇ ਖ਼ੁਦ ਅਪਣੇ ਮਸ਼ਹੂਰ ਕੋਓਰਡੀਨੇਟ ਐਕਸੀਸ ਵੀ ਐਸੈ ਵਿਚਾਰਾਂ ਦੀ ਇਕ ਲੜੀ ਤੇ ਚਲਦੇ ਹੀ ਲੱਭੇ ਸਨ? ਮਾਲੂਮ ਨਹੀਂ!

ਐਣੀਵੇ, ਹਰ ਪੌਐਂਟ $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ਵਿਚੋਂ ਲੰਘਦੀਆਂ ਹਨ n ਰੇਖਾਂਵਾਂ ਜਿਹਨਾਂ ਉਤੇ ਇਕ ਹੀ ਕੋਓਰਡੀਨੇਟ ਬਦਲਦਾ ਹੈ ਅਤੇ, ਸਾਰੇ ਦਾ ਸਾਰਾ $\mathbb{R}^n$ ਮੀਨੀਮਲ ਸੈਟ ਹੈ ਇਸ ਸਪੇਸ ਦੀ ਕੋਈ ਐਸੀ ਕਾਰਟੀਸ਼ੀਅਨ ਮੋਸ਼ਨ ਦਾ ਸਚ ਦੈਟ, ਜਦੋਂ ਕੋਈ ਪੌਐਂਟ ਹਿਲਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਇਹਨਾਂ n ਵਿਚੋਂ ਇਕ ਲਾਇਨ ਉਤੇ ਹੀ ਹਿਲਦਾ ਹੈ, ਅਤੇ ਕਦੇ ਨਾਂ ਕਦੇ ਹਰ ਇਕ ਲਾਇਨ ਉਤੇ ਹਿਲਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਰਚਨਾ ਦੇ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀਕੋਨ ਤੋਂ $n \geq 2$ ਲਈ ਯੁਕਲਿਡ ਦਾ ਮੈਟਰਿਕ ਉਚਿਤ ਨਹੀ, ਇਹ $\mathbb{R}^n$ ਦਿਆਂ n ਖਾਸ ਦਿਸ਼ਾਂਵਾਂ ਨੂ ਮਹੱਤਵ ਨਹੀਂ ਦਿੰਦਾ। ਹੁਣ ਕਾਰਟੀਸ਼ੀਅਣ--ਭਾਵ ਕੁਦਰਤੀ--ਡਿਸਟੈਂਸ ਹੈ ਸੱਭ ਤੋਂ ਘੱਟ ਜੋ ਸਾਨੂੰ ਚਲਣਾਂ ਪੈਂਦਾ ਹੈ ਕੋਈ ਇਸ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ $\mathbf{x}$ ਤੋਂ $\mathbf{y}$ ਤੱਕ, i.e., $|x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|$। ਇਹ ਟੋਪੋਲੋਜੀ ਤਾਂ ਓਹੀ ਦਿੰਦਾਂ ਹੈ ਪਰ ਜੀਓਮੈਚਟੀ ਅਲਗ ਹੈ, ਮਸਲਣ, ਹੁਣ ਅਕਸਰ ਦੇ ਪੈਐਂਟਸ ਵਿਚ ਅਣਗਿਣੱਤ ਸੱਬ ਤੋਂ ਛੋਟੇ ਰਸਤੇ ਹਨ।

ਗਲ ਏਥੇ ਨਹੀਂ ਮੁਕਦੀ, ਕੋਈ ਓਪੈਣ ਕੋਨੈਕਟਿਡ ਸੈਟ $U \subset \mathbb{R}^n$ ਮੀਨੀਮਲ ਸੈਟ ਹੈ ਐਸੈ ਹੀ ਕੋਈ ਕਾਰਟੀਸ਼ਅਨ ਮੋਸ਼ਨ ਦਾ ਜੋ ਓਸ ਤੱਕ ਸੀਮਿਤ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ U ਓਪੈਣ ਕੋਨੈਕਟਿਡ ਹੈ ਰਸਤੇ ਹਣ ਜਿਹਨਾਂ ਉੱਤੇ ਕਿਸੀ ਨਾਂ ਕਿਸੀ ਐਕਸਿਸ ਦੇ ਪੈਰੈਲਲ ਚਲਦੇ ਅਤੇ, ਹਮੇਸ਼ਾਂ U ਵਿਚ ਰਹਿੰਦੇ, ਅਸੀ ਇਹਦੇ ਕੋਈ ਇਕ ਪੌਐਂਟ $\mathbf{x}$ ਤੋਂ ਕੋਈ ਦੂਜੇ $\mathbf{y}$ ਤੱਕ ਪਹੁੰਚ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਉਪਲਭਦ ਰਸਤੇ ਜੋ ਘਟ ਗਏ ਹਨ, ਇਨਫ਼ੀਮਮ ਜੋ ਸਾਣੂ ਚਲਣਾਂ ਪੈ ਸਕਦਾ ਹੈ ਹੁਣ ਵਧ ਹੋ ਸਕਦੈ : ਹਰ U ਦਾ ਆਪਣੀ ਰੱਚਨਾ ਨਾਲ ਬੰਧੇਆ ਕੁਦਰਤੀ ਡਿਸਟੈਂਸ $\mathbb{R}^n$ ਦੇ ਕਾਰਟੀਸ਼ਅਣ ਡਿਸਟੈਸ ਦੀ ਰੈਸਟ੍ਰਿਕਸ਼ਨ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਪਰ ਕਥਿਤ ਇਨਫ਼ੀਮਮ ਵੀ ਆਪਣੀ ਰਚਣਾ ਨਾਲ ਬੰਧੇਆ U ਦਾ ਨੌਨਰੈਲੇਟਿਵਿਸਟਿਕ ਕਾਰਟੀਸ਼ਅਨ ਡਿਸਟੈਂਸ ਹੀ ਹੈ। ਹਰ ਪੈਂਡਾ ਜੋ ਅਸੀ ਚਲਦੇ ਹਾਂ ਓਹ ਇਕ ਲਾਇਨ ਤੇ ਹੈ ਜੋ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਕਿ ਪੂਰੀ ਦੀ ਪੂਰੀ U ਵਿਚ ਹੈ। ਜੇ ਨਹੀਂ ਤਾ ਆਪਾਂ ਨੂੰ ਪੈਂਡਾ ਮਾਪਣ ਲਈ ਕੇਏਲੀ ਡਿਸਟੈਂਸ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਨੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ, ਜੋ ਓਹ ਇਕ ਯਾਂ ਦੋ ਪੌਐਂਟਸ ਤੇ ਵੀ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦਾ ਹੈ ਜਿਥੇ ਇਹ ਲਾਇਨ U ਤੋਂ ਬਾਹਰ ਚਲੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਇਹ ਮੋਡੀਫ਼ਿਕੇਸ਼ਣ ਬਾਦ ਓਹੀ ਇਨਫ਼ੀਮਮ ਦਿੰਦਾਂ ਹੈ ਸਾਨੂੰ ਆਪਣੀ ਰਚਣਾ ਨਾਲ ਬੰਧੇਆ U ਦਾ ਰੈਲੇਟਿਵਿਸਟਿਕ ਕਾਰਟੀਸ਼ਅਨ ਡਿਸਟੈਂਸ।

ਯਾਦ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਹੋਮੋਟੋਪੀ ਟਾਇਪ ਤੱਕ ਕੋਈ ਵੀ ਕਲੋਜ਼ਡ ਮੈਨੀਫ਼ੋਲਡ ਐਸਾ ਕੋਈ U ਹੈ। ਸੋ ਕਿਣਿਆਂ ਹੀ ਚੀਜ਼ਾਂ ਲਈ, ਮਸਲਨ ਦੀ ਰਾਮ ਯਾਂ ਸੀਕਲਿਕ ਕੋਹੋਮੋਲੋਜੀ, ਮੇਨੀਫ਼ੋਲਡ ਦੀ ਥਾਂ $U \subset \mathbb{R}^n$ ਵਰਤ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਜੋ ਅਕਸਰ ਇਹ ਖਿਆਲਾਂ ਨੂੰ ਕਿਤੇ ਜਿਆਦਾ ਸਰਲ ਤੇ ਕੁਦਰਤੀ ਬਣਾ ਦਿੰਦਾ ਹੈ।

੪੭. ਪਿਛਲੇ ਨੋਟ ਅੱਤੇ ਜੋ ਇਸਤੋਂ ਪਹਲਾਂ ਹੋ ਰਿਹਾ ਸੀ ਵਿਚ ਅੰਤਰ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਓਦੋਂ ਕੋਓਰਡੀਨੇਟਸ ਦਾ ਟੋਟਲ ਓਰਡਰ ਵੀ ਪਲੇ ਵਿਚ ਸੀ ਸੋ ਕੁਝ ਨੋਨਕੌਮੁਟੇਟਿਵ ਸੀ ਓਹ ਖੇਲ। ਇਹ ਵਰਤਦੇ ਹੋਏ ਹੀ ਤਾਂ ਹਰ $\odot \in \mathbb{R}^n$ ਨੂੰ ਇਕ ਡਿਗਰੀ n ਇਕੁਏਸ਼ਨ ਇਨ $\mathbf{x}$ ਬਣਾ ਦਿਤਾ ਸੀ। ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਰੂਟਾਂ ਨੂੰ ਵਿਚਾਰਦੇ ਅਸੀਂ $\mathbb{R}^n$ ਦੇ ਫ਼ੰਡਾਮੈਂਟਲ ਪਾਰਟੀਸ਼ਨ, ਖਾਸ ਕਰਕੇ n-ਸਵੈਲੋਟੇਲ, ਨੂੰ ਨਿਹਾਰਣ ਲਗ ਪਏ ਸਾਂ। ਇਹਦੀ ਨੋਟ ੪੨ ਵਾਲੀ ਕਾਰਟੀਸ਼ੀਅਨ ਕਰੀਏਸ਼ਨ ਉਤੋਂ ਉਤੋਂ ਹੀ ਪਿਛਲੇ ਨੋਟ ਵਰਗੀ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਰੂਟਾਂ ਦਾ ਸਾਂਨੂ ਪੂਰਾ ਪਤਾ ਨਹੀਂ ਇਹ ਕੁਝ ਛੁਪੀ ਯਾਂ ਕਵਾਂਟਾਇਜ਼ਡ ਜੇਹੀ ਹੈ। ਪਰ ਦੂਜੇ ਪਾਸੇ ਇਸ ਇਚ ਇਕ ਮਨਮੋਹਕ ਫ਼ੀਚਰ ਹੈ ਜੋ ਪਿਛਲੇ ਨੋਟ ਦੀ ਕਲਾਸੀਕਲ ਤਸਵੀਰ ਵਿਚ ਨਹੀਂ। ਇਹ ਤਸਵੀਰ ਖਲੋਤੀ ਨਹੀਂ, ਇਹ ਤਾਂ ਚਲ ਰਹੀ ਹੈ! ਓਸ ਸਟੈਡੀ ਬੇਬੀ ਫ਼ਲੋ ਥੱਲੇ, ਜੋ ਨਾਮ ਹੈ ਦੂਜਾ ਓਹ ਮੂਲ ਜਮਾਂ ਅਤੇ ਜ਼ਰਬ ਵਿਚ ਰਿਸ਼ਤੇ ਦਾ, ਜੋ ਬੇਬੀ ਅਲਜਬਰਾ ਨੇ ਸਿਧ ਕੀਤਾ ਸੀ।

ਨੋਟ ੪੬ ਵਰਗੇ ਨੋਟ ੪੨ ਦੀ ਕਾਰਟੀਸ਼ੀਅਨ ਰਚਨਾ ਨਾਲ ਬੰਧੇ ਹੋਏ n-ਸਵੇਲੋਟੇਲ ਦੇ ਰੈਲੇਟਿਵਿਸਟਿਕ ਤੇ ਨੋਨ ਰੈਲੇਟਿਵਿਸਟਿਕ ਡਿਸਟੈਂਸਸ ਨੂੰ ਬੇਬੀ ਫ਼ਲੋ ਪਰੀਜ਼ਰਵ ਕਰਦਾ ਹੈ, ਦਰਅਸਲ ਫ਼ਲੋ ਨੂੰ ਜੈਨੈਰੇਟ ਕਰਦੀਆਂ ਇਨਵੋਲੁਸ਼ਨਜ਼ ਥਲੇ ਵੀ ਇਹ ਕਾਇਮ ਰਹੰਦੇ ਨੇ :- ਬੰਦਿਸ਼ ਕਿ ਹਿਲਦਾ ਰੂਟ α_j ਸਿੰਪਲ ਰਹੇ ਇਹ ਨੂੰ α_{j-1} ਤੇ α_{j+1} ਗੱਭੇ ਕੈਦ ਕਰ ਦਿੰਦੀ ਹੈ। ਕੋਈ $a < b$ ਜੋ ਇਸ ਜੇਲ ਵਿਚ ਹਨ ਓਹਨਾਂ ਦਰਮਿਆਨ ਨੌਨ ਰੈਲੇਟਿਵਿਸਟਿਕ ਪੈਂਡਾ ਹੈ $b-a$ ਅਤੇ ਰੈਲੇਟਿਵਿਸਟਿਕ $\log\left(\frac{b-\alpha_{j-1}}{a-\alpha_{j-1}} \times \frac{\alpha_{j+1}-a}{\alpha_{j+1}-b}\right)$। ਦੂਜਾ ਫ਼ੋਰਮੂਲਾ ਓਦੋਂ ਵੀ ਕਮ ਕਰਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਦੋਆਂ ਚੋਂ ਇਕ ਜੇਲਰ ਇਨਫ਼ੀਨੀਟੀ ਤੇ ਚਲਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਕਰੌਸ ਰੇਸ਼ੋ ਦੀ ਮਲਟੀਪਲਿਕੇਟਿਵ ਟਰਾਈਐਂਗਲ ਇਨਇਕੂਐਲੀਟੀ -- PG&R -- ਦਾ ਤਾਂ ਪਾਪੂਸ ਨੂੰ ਵੀ ਪਤਾ ਸੀ, ਕੇਏਲੀ ਦੇ log ਨੇ ਇਹ ਨੂੰ ਐਡਿਟਿਵ ਬਣਾ ਦਿਤਾ। ਨੋਟ ੩੯ ਦੇ ਕਿਸੀ ਇਨਵੋਲੁਸ਼ਨ ਥੱਲੇ ਸਾਰੇ ਰੁਟ ਕਿਸੀ ਵੀ $\odot$ ਦੇ ਰੈਫ਼ਲੈਕਟ ਹੋ ਜਾਂਦੇ ਨੇ ਇਕ ਨੰਬਰ ਵਿਚ। ਸੋ ਇਹ ਰੈਸੀਪੀ ਵਿਚ ਇਸਤਮਾਲ ਸਾਰੇ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸਿਸ ਦਾ ਸਾਇਣ ਹੀ ਬਦਲਦਾ ਹੇ, ਇਹ ਦੋਨੋਂ ਡਿਸਟੈਂਸਿਸ ਕਾਇਮ ਰਹੰਦੇ ਨੈ। □

ਇਹ ਜੀਓਮੈਟਰੀ ਬੜੀ ਫ਼ਲੈਕਸੀਬਲ ਹੈ! ਸਵੈਲੋਟੇਲ ਆਈਸੋਮੈਟਰਿਕ ਹੈ ਓਪੈਣ ਸੈਟ U ਓਫ਼ ਓਲ ਸਟ੍ਰਿਕਟਲੀ ਵੱਦਧੇ n-ਟਪਲ $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ ਨਾਲ, ਵਿਦ ਨੋਟ ੪੬ ਦੇ U ਦੇ ਕਾਰਟੀਸ਼ੀਅਨ ਡਿਸਟੈਂਸ। ਫ਼ਲੈਕਸੀਬਿਲੇਟੀ ਦਾ ਨਮੂਣਾ ਇਹ ਕਿ ਨੋਟ ੪੨ ਦੀ n ਹਿਸੇਆਂ ਵਾਲੀ ਸਿਧੀ ਲਾਇਨ ਦੇ ਹੁਣ ਸਾਰੇ ਹਿਸੇ ਅਲਗ ਅਲਗ ਅਕਸੀਸ ਦੇ ਪੈਰੇਲਲ ਹਨ, ਵਿਦ ਪਹਿਲਾ ਤੇ ਆਖਰੀ ਹਿਸਾ ਇਨਫ਼ੇਨਾਇਟ। ਦੂਜੇ ਲੋਟ, ਮੋਮੈਂਟ ਕਰਵ ਵਾਂਗ ਘੁੰਮਦੀ ਸਮੁਦ ਕਸਪਾਈਡਲ ਕਰਵ ਹੁਣ ਜਵਾਂ ਸਿਧੀ ਹੋ ਗਈ ਹੈ। ਸੋ ਹੁਣ ਇਹਦੇ ਕੋਈ ਵੈਲ ਡੀਫ਼ਾਇਨਡ ਚੁੰਮਦੇ ਹਾਈਪਰਪਲੇਨ ਵਗੈਰਾ ਨਹੀਂ, ਜਿਹਨਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਇਕੁਏਸ਼ਨਾਂ ਹਲ ਕਰ ਰਹੇ ਸਾਂ। ਦੁਜੇ ਪਾਸੇ, ਕਿਉਂਕਿ U ਕੋਨਵੈਕਸ ਹੈ, ਇਹਦਾ ਨੌਨ ਰੈਲੈਟਿਵਿਸਿਟਿਕ ਡਿਸਟੈਂਸ $\mathbb{R}^n$ ਦੇ ਕਾਰਟੀਸ਼ਅਣ ਡਿਸਟੈਂਸ ਦੀ ਰਿਸਟ੍ਰਿਕਸ਼ਨ ਹੀ ਹੈ, ਅਤੇ ਇਸ ਦਾ ਰੈਲੈਟਿਵਿਸਿਟਿਕ ਡਿਸਟੈਸ਼ ਨਾਲ ਰਿਸ਼ਤਾ ਲੱਭਣ ਲਈ ਵੀ ਇਹ ਹੀ ਤਸਵੀਰ ਠੀਕ ਹੈ। ਬਾਇ ਦੀ ਵੇ, ਇਹ ਓਪੈਣ ਸੈਟ U ਇਨਟੀਰੀਅਰ ਹੀ ਹੈ ਓਹ ਚੈਂਬਰ $W = W^1$ ਦਾ, ਜਿਹਦੀ ਜੈਨੇਰਲਆਈਜ਼ੇਸ਼ਨ $W^m \subset \mathbb{R}^{mn}$ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਅਸੀਂ FTA ਵਿਚ $\mathrm{Sym}^n(\mathbb{R}^m)$ ਦੀ ਟੋਪੋਲੋਜੀ ਐਨੇਲਾਇਜ਼ ਕੀਤੀ ਸੀ।

ਪਰ ਅਜੇ ਤਕ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਪੂਰੇ ਬੇਬੀ ਫ਼ਲੋ ਯਾਂ ਐਕਸ਼ਨ ਦੇ ਇਕ ਹਿਸੇ ਨੂੰ ਹੀ ਤੱਕ ਰਹੇ ਹਾਂ! ਪੂਰਾ ਖੁਦ ਅੱਗੇ ਆ ਜਾਏਗਾ ਜਦੋਂ ਆਪਾਂ ਪਰੋਜੈਕਟਿਵ ਕੋਮਪੈਕਟੀਫ਼ਿਕੈਸ਼ਨ ਦਾ ਸਿਲ ਸਲਾ ਇਕ ਕੁਦਰਤੀ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਸਾਫ਼ ਸਾਫ਼ ਸਮਝ ਲਵਾਂਗੇ। ਇਹ ਹੀ ਹੈ ਏਜੈਂਡਾ ਅਗਲੇ ਨੋਟ ਦਾ।

੪੮. ਸਾਡੀ ਰੁਚੀ ਹੈ $\mathbf{x}$ ਦਿਆਂ ਇਕੁਏਸ਼ਨਾਂ $\cdots + a_j\mathbf{x}^j + \cdots + a_0 = 0$ ਵਿਚ, ਜਿਥੇ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘਟ ਇਕ, ਪਰ ਗਿਣਤੀ ਦੇ ਹੀ ਕੋਐਫ਼ੀਸ਼ੈਂਟ $a_j \in \mathbb{R}$ ਨੌਨਜ਼ੀਰੋ ਹਨ। ਕਿਉਂਕਿ ਇਕ ਨੋਨਜ਼ੀਰੋ ਨੰਬਰ ਨਾਲ ਜ਼ਰਬ ਇਕੁਏਸ਼ਨ ਨੂੰ ਬਦਲਦੀ ਨਹੀਂ, ਸਾਰਿਆਂ ਇਕੁਏਸ਼ਨਾਂ ਦੀ ਸਪੇਸ ਹੈ $\mathbb{R}P^\infty$, ਯਾਣੀ ਕਿ ਸਪੇਸ ਓਫ਼ ਇਕੁਵੈਲੈਂਸ ਕਲਾਸਿਸ $[\dots, a_j, \dots, a_0]$ ਐਸੇ ਸੀਕਵੈਂਸਿਸ ਦੇ ਮਲਟੀਪਲਜ਼ ਦੀ। ਕਿਸੀ ਇਕੁਏਸ਼ਨ ਦੀ ਡਿਗਰੀ ਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਸਬ ਤੋਂ ਵੱਢਾ j ਸਚ ਦੈਟ a_j ਨੌਨਜ਼ੀਰੋ ਹੈ। ਸਾਰਿਆਂ ਇਕੁਏਸ਼ਨਜ਼ $\mathbf{x}$ ਦੀਆਂ ਜਿਨਹਾਂ ਦੀ ਡਿਗਰੀ $\leq n$ ਹੈ ਬਣਾਂਦੀਆਂ ਹਨ ਰੀਅਲ ਪਰੋਜੈਕਟਿਵ n-ਸਪੇਸ $\mathbb{R}P^n$, ਸਬਸਪੇਸ $\mathbb{R}P^\infty$ ਦੀ ਜੋ ਬਣਾਂਦੇ ਹਨ ਸਾਰੇ ਸੀਕਵੈਂਸ $[\dots, 0, a_n, \dots, a_j, \dots, a_0]$। ਸਾਰਿਆਂ ਇਕੁਏਸ਼ਨਾਂ $\mathbf{x}$ ਦਿਆਂ ਜਿਨਹਾਂ ਦੀ ਡਿਗਰੀ ਠੀਕ n ਹੈ ਓਹ ਬਣਾਂਦੀਆਂ ਹਨ $\mathbb{R}^n$, ਸਬਸਪੇਸ $\mathbb{R}P^n$ ਜੋ ਬਣਾਂਦੇ ਹਨ ਸਾਰੇ $[\dots, 0, a_n, \dots, a_j, \dots, a_0]$ ਵਿਦ $a_n \neq 0$, ਅਤੇ ਜੇ ਇਸ ਕੋਐਫ਼ੀਸ਼ੈਂਟ ਨੂੰ ਆਪਾਂ ਬਣਾ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ $a_n = 1$ ਤਾਂ ਮਿਲ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਬਾਈਜੈਕਸ਼ਨ ਸਪੇਸ ਓਫ਼ n-ਟੁਪਲਜ਼ $(a_0, \dots a_{n-1})$ ਨਾਲ।

ਹੋਮੋਜੈਨਆਈਜ਼ੇਸ਼ਨ ਇਸ ਤੋਂ ਉਭਰ ਦੀ ਹੈ : ਕੁਝ ਇਕੁਏਸਨਾਂ $\odot \in \mathbb{R}P^n$ ਦੀ ਡਿਗਰੀ j ਇਸ ਲਈ ਹੀ n ਤੋਂ ਨੀਂਵੀਂ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਇਨਫ਼ੀਨੀਟੀ ਓਹਣਾਂ ਦਾ $n-j$ ਮਲਟੀਪਲੀਸੀਟੀ ਦਾ ਰੂਟ ਹੈ:- ਇਕੁਏਸ਼ਨਜ਼ ਡਿਗਰੀ ਇਕ ਅਤੇ ਜ਼ੀਰੋ ਦਿਆਂ, ਬਣਾਂਦੀਆਂ ਹਨ $\mathbb{R}P^1 = \mathbb{R}^1 \cup \mathbb{R}^0$, ਜਿਥੇ ਬਿੰਦੂ $\mathbb{R}^0$ ਇਕਲੌਤੀ ਡਿਗਰੀ ਜ਼ੀਰੋ ਦੀ ਇਕੁਏਸ਼ਨ $1 = 0$ ਹੈ, ਜਿਹਦਾ ਕੋਈ ਫ਼ਾਇਨਾਇਟ ਰੂਟ $x \in \mathbb{R}$ ਨਹੀਂ, ਪਰ ਅਸੀ ਆਖਾਂ ਗੇ ਕਿ ਓਹਦਾ ਇਨਫ਼ੀਨੀਟੀ $x = \infty$ ਰੂਟ ਹੈ, ਐਕਸਟੈਂਡਿਡ ਰੀਅਲਜ਼ $\mathbb{R} \cup \infty = S^1$ ਵਿਚ। ਹੋਰ ਬਰੀਕੀ ਨਾਲ, ਐਕਸਟੈਂਡਿਡ ਰੀਅਲਜ਼ ਹਨ ਓਹ ਇਕੁਵੈਲੈਂਸ ਕਲਾਸਿਸ $[x, y]$ ਰੀਅਲ ਨੰਬਰਾਂ ਦਿਆਂ--ਸੋ $x \in \mathbb{R}$ ਹੈ $[x, 1]$ ਅਤੇ $\infty = [1, 0]$--ਅਤੇ $[x, y]$ ਦਾ ਡਿਗਰੀ ≤ 1 ਦੀ ਇਕੁਏਸ਼ਨ $a_1\mathbf{x} + a_0 = 0$ ਦਾ ਰੂਟ ਹੋਨ ਦਾ ਮਤਲਬ ਹੈ $a_1x + a_0y = 0$। ਐਵੇਂ ਹੀ, ਸਾਰੀਆਂ ਡਿਗਰੀ $\leq n$ ਦਿਆਂ ਇਕੁਏਸ਼ਨਾਂ $a_n\mathbf{x}^n + \cdots + a_0 = 0$ ਬਣਾਂਦੀਆਂ ਹਨ $\mathbb{R}P^n = \mathbb{R}^n \cup \ldots \cup \mathbb{R}^j \cup \ldots \cup \mathbb{R}^0$--ਇਕ ਪਰੋਜੈਕਟਿਵ n-ਸਪੇਸ ਦਾ ਸੈਲਜ਼ ਵਿਚ ਵੀਭਾਜਨ, ਹਰ ਡਾਈਮੈਨਸ਼ਨ ਦਾ ਇਕ ਸੈਲ--ਅਤੇ ਐਕਸਟੈਂਡਿਡ ਰੀਅਲ $[x, y]$ ਨੂੰ ਓਦੋਂ ਰੂਟ ਆਖਾਂ ਗੇ ਜਦੋਂ $\mathbf{x} = x, \mathbf{y} = y$ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੇ ਹਨ $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ ਵਿਚ ਡਿਗਰੀ n ਦੀ ਹੋਮੋਜੀਨਸ ਇਕੁਏਸ਼ਨ $a_n\mathbf{x}^n + \cdots + a_j\mathbf{x}^j\mathbf{y}^{n-j} + \cdots + a_0\mathbf{y}^n = 0$ ਨੂੰ। ਇਹ ਓਦੋਂ ਤੇ ਓਦੋਂ ਹੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ $y\mathbf{x} - x\mathbf{y}$ ਇਕੁਏਸ਼ਨ ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਤਕਸੀਮ ਕਰਦੈ। ਸੈਲ $\mathbb{R}^j$ ਵਿਚ ਹਨ ਸਾਰਿਆਂ ਇਕੁਏਸ਼ਨਾਂ ਡਿਗਰੀ j ਦਿਆਂ, i.e., ਓਹ ਸਾਰਿਆਂ ਜਿਨਹਾਂ ਦੇ ਕੋਐਫ਼ੀਸ਼ੈਂਟ $a_n = \cdots = a_{j+1} = 0$ ਅਤੇ $a_j \neq 0$, i.e., ਓਹ ਜਿਨਹਾਂ ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਦਾ ਫ਼ੈਕਟਰ ਹੈ $\mathbf{y}^{n-j}$, i.e., ਓਹ ਸਾਰਿਆਂ ਜਿਨਹਾਂ ਦਾ $[1, 0] = \infty$ ਮਲਟੀਪਲੀਸੀਟੀ $n-j$ ਦਾ ਰੂਟ ਹੈ। □

ਹੋਮੋਜਿਨਆਈਜ਼ੇਸ਼ਨ ਓਹਨਾਂ ਇਕੁਏਸ਼ਨਾਂ ਲਈ ਡੀਫ਼ਾਇਣਡ ਹੈ ਜਿਹਨਾਂ ਦੀ ਡਿਗਰੀ ਹਦ n ਹੈ, ਪਰ ਤਦ, ਕੋਈ ਕਾਰਣ ਨਹੀਂ ਕਿ ਅਸੀ $\mathbf{y}$ ਨਾਲ ਸੌਤੇਲੀ ਮਾਂ ਦਾ ਵਰਤਾਵ ਕਰੀਏ, ਦਰਅਸਲ ਇਹ ਬਾਲ ਸਾਨੂੰ ਨੋਟ ੩੯ ਦੀਆਂ ਸੀਮਿਟਰੀਜ਼ ਦੇ ਪਵਾਂਕਾਰੇ ਡੂਅਲ ਦਿੰਦਾ ਹੈ :- ਐਕਸਟੈਂਡਿਡ ਰੀਅਲਜ਼ ਦੋ ਚਾਰਟਸ $\mathbb{R}$ ਤੋਂ ਬਣਦੇ ਹਨ ਜੇ ਆਪਾਂ ਇਕ ਦੇ ਕੋਈ ਨੌਨਜ਼ੀਰੋ ਨੰਬਰ x ਨੂੰ ਦੂਜੇ ਵਿਚ ਇਸਦੇ ਰੈਸੀਪਰੋਕਲ y ਨਾਲ ਚਿਪਕਾ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ, ਅਤੇ ਜ਼ੀਰੋ ਕਿਸੀ ਦੇ ਨੂੰ ਦੂਜੇ ਦੀ ਇਨਫ਼ੀਨੀਟੀ ਮਣ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ। ਸਪੇਸ ਸਾਰਿਆਂ ਡਿਗਰੀ n ਹੋਮੋਜੀਨਸ ਇਣ $\mathbf{x}$ ਐਂਡ $\mathbf{y}$ ਇਕੁਏਸ਼ਨਜ਼ $a_n\mathbf{x}^n + \cdots + a_j\mathbf{x}^j\mathbf{y}^{n-j} + \cdots + a_0\mathbf{y}^n = 0$, ਯਾਣੀ ਕਿ, $\mathbb{R}P^N$ ਨਾਲ ਹੀ ਸਪੇਸ ਹੈ $\mathbf{y}$ ਦਿਆਂ ਸਭ ਇਕੁਏਸ਼ਨਜ਼ $a_n + \cdots + a_j\mathbf{y}^{n-j} + \cdots + a_0\mathbf{y}^n = 0$ ਦੀ ਜਿਨਹਾਂ ਦੀ ਡਿਗਰੀ $\leq n$ ਹੈ। ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ ਇਹ ਡਿਗਰੀ $n-j$ ਦਾ ਮਤਲਬ ਹੈ ਕਿ j ਸਬ ਤੋਂ ਛੋਟਾ ਨੰਬਰ ਹੈ ਸਚ ਦੈਟ $a_j \neq 0$। ਪਵਾਂਕਾਰੇ ਡੂਅਲ ਸੈਲ ਵੰਡ $\mathbb{R}P^n = {}^*\mathbb{R}^0 \cup \ldots \cup {}^*\mathbb{R}^{n-j} \cup \ldots \cup {}^*\mathbb{R}^n$ ਦਾ $(n-j)$-ਸੈਲ ${}^*\mathbb{R}^{n-j}$ ਬਣਾਂਦਿਆਂ ਹਨ ਸਾਰਿਆਂ ਇਕੁਏਸ਼ਨਾਂ $a_n + \cdots + a_j\mathbf{y}^{n-j} = 0, a_j \neq 0$ ਇਣ $\mathbf{y}$ ਓਫ਼ ਡਿਗਰੀ $n-j$, ਯਾਣੀ ਕਿ ਜਿਨਹਾਂ ਦਾ $\mathbf{y} = \infty$, i.e., $[0, 1]$, ਮਲਟੀਪਲੀਸੀਟੀ j ਦਾ ਰੂਟ ਹੈ। ਐਕਸਟੈਂਡਿਡ ਰੀਅਲਜ਼ ਦੇ ਦੂਜੇ ਚਾਰਟ ਦੇ ਰਿਫ਼ਲੈਕਸ਼ਨ ਵੀ ਐਕਟ ਕਰਦੇ ਹਨ $\mathbb{R}P^n$ ਉਤੇ ਇਨਵੋਲੂਸ਼ਨਜ਼ $\mathbf{y} \mapsto s - \mathbf{y}$ ਬਣ ਕੇ। ਇਹ ਐਕਸ਼ਣ $\mathbf{y}$-ਡਿਗਰੀ ਪਰੀਜ਼ਰਵ ਕਰਦਾ ਦੈ, ਯਾਣੀ ਕਿ, $\mathbb{R}P^n$ ਦਾ ਡੂਅਲ ਸੈਲ ਸਬਡੀਵੀਯਨ। □ ਇਸ ਐਕਸ਼ਣ ਨੂੰ ਵੀ, ਦਰਅਸਲ ਕੋਈ ਵੀ ਚੀਜ਼ ਜਿਸ ਵਿਚ ਨਿਕੀ ਗੁਡੀ ਅਲਜਬਰਾ ਦਾ ਸਿਧ ਕਿਤਾ ਹੋਏਆ ਓਹ ਜਮਾਂ ਅਤੇ ਜ਼ਰਬ ਵਿਚਕਾਰ ਰਿਸ਼ਤਾ ਇਸਤਮਾਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਨੂੰ ਕੁਦਰਤੀ ਹੀ ਹੈ ਕਿ ਸਬ ਲੋਗ ਅਲਜਬਰਾ-ਇਕ ਹੀ ਆਖਦੇ ਹਨ!

ਅੱਗੇ, ਐਕਸਟੈਂਡਿਡ ਰੀਅਲਜ਼ ਦੀ ਕੋਈ ਲੀਨੀਅਰ ਆਇਸੋਮੋਰਫ਼ਿਜ਼ਮ $\mathbb{R}P^n$ ਉੱਤੇ ਸਬਸਟੀਚੂਸ਼ਨਜ਼ ਨਾਲ ਐਕਟ ਕਰਦੀ ਹੈ ਅੱਤੇ ਓਹਦੀ ਫ਼ੰਡਾਮੈਂਟਲ ਵੰਡ ਨੂੰ ਕਾਇਮ ਰਖਦੀ ਹੈ, ਪਰ ਦੋਆਂ ਸੈਲ ਸੱਬਡੀਵੀਯਨਜ਼ ਨੂੰ ਵਿਗਾੜ ਸਕਦੀ ਹੈ:- ਐਕਸਟੈਂਡਿਡ ਰੀਅਲਜ਼ $[x, y]$ ਨੂੰ $\mathbb{R}^2$ ਦਿਆਂ ਓਰੀਜਨ ਵਿਚੋਂ ਰੇਖਾਂਵਾਂ ਵੱਜੋਂ ਤੱਕੋ; ਤਾਂ ਆਇਸੋਮੋਰਫ਼ਿਜ਼ਮ ਦਾ ਰੂਪ ਹੈ $[x, y] \mapsto [ux + ty, sx + vy], uv - st \neq 0$; ਅਤੇ $\mathbb{R}P^n$ ਨੂੰ ਸਾਰਿਆਂ $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ ਦਿਆਂ ਡਿਗਰੀ n ਹੋਮੋਜੀਨਅਸ ਇਕੁਏਸ਼ਨਜ਼ ਮਣਦੇ ਹੋਏ ਐਕਸ਼ਨ ਡੀਫ਼ਾਇਨ ਕਰਦੇ ਹਨ ਸਬਸਟੀਚੂਸ਼ਨਜ਼ $\mathbf{x} \mapsto u\mathbf{x} + t\mathbf{y}, \mathbf{y} \mapsto s\mathbf{x} + v\mathbf{y}$। ਜ਼ਾਹਿਰ ਹੈ ਕਿ ਐਕਸਟੈਂਡਿਡ ਰੀਅਲ $[x, y]$ ਨੰਵੀ ਇਕੁਏਸ਼ਨ ਦਾ ਰੂਟ ਓਦੋਂ ਤੇ ਓਦੋਂ ਹੀ ਹੈ ਜਦ $[ux + ty, sx + vy]$ ਪੁਰਾਣੀ ਦਾ ਓਹੀ ਮਲਟੀਪਲੀਸੀਟੇ ਦਾ ਰੂਟ ਹੈ, ਸੋ $\mathbb{R}P^n$ ਦਾ ਫ਼ੰਡਾਮੈਂਟਲ ਪਾਰਟੀਸ਼ਨ ਪਰੀਜ਼ਰਵ ਕਰਦੀ ਹੈ ਇਹ ਬਾਈਜੈਕਸ਼ਨ। □ ਇਥੇ ਅਸੀਂ ਵਰਤੋਂ ਕੀਤੀ ਸੀ ਇਸ ਤੱਥ ਦੀ ਕਿ ਇਸ ਵੰਡ ਦੇ $[\frac{n}{2}] + 1$ ਡਿਸਜੌਐਂਟ ਪਾਰਟਸ ਵਿਚ ਸਾਰੀਆਂ ਇਕੁਏਸ਼ਣਾਂ ਦੇ ਮਲਟੀਪਲੀਸੀਟੀ ਨਾਲ ਇੱਕੋ ਨੰਬਰ ਦੇ ਐਕਸਟੈਂਡਿਡ ਰੀਅਲ ਰੂਟ ਹਨ। kਥ ਪਾਰਟ ਲਈ ਇਹ ਨੰਬਰ ਹੈ $n - 2k$, ਬਾਕੀ ਰੂਟ k ਕੌਮਪਲੈਕਸ ਜੋੜੇ $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ਵਿਚ ਹਨ, ਯਾਨੀ ਕਿ, ਰੀਮਾਣ ਸਫ਼ਿਅਰ

$\mathbb{C} \cup \infty$ ਦੇ ਸਰਕਲ $\mathbb{R} \cup \infty$ ਦੇ ਕੌਮਪਲੀਮੈਂਟ ਵਿਚ। ਯਾਦ ਰਹੇ ਕਿ, ਹਰ ਪਾਰਟ ਦਾ ਇਨਟੀਰੀਅਰ ਕੋਨੈਕਟਿਡ ਹੈ ਤੇ ਇਹ ਬਣਾਂਦਿਆਂ ਹਨ ਓਹਦਿਆਂ ਓਹ ਸਭ ਇਕੁਏਸ਼ਨਾਂ ਜਿਨਹਾਂ ਦੇ ਸਿੰਪਲ ਐਕਸਟੈਂਡਿਡ ਰੀਅਲ ਰੂਟ ਹਨ, ਪਰ ਕੌਮਪਲੈਕਸ ਕੌਨਜੁਗੇਟ ਜੋੜੇ ਰੀਪੀਟ ਕਰ ਸਕਦੇ ਨੇ -- ਦੇਖੋ ਐਫ਼ਟ ਫ਼ਟਾ -- ਅੱਤੇ ਸਾਡਾ ਜਿਆਦਾ ਫ਼ੋਕੱਸ ਪਾਰਟ $k = 0$ ਉੱਤੇ ਹੀ ਹੈ, i.e., ਪਰੋਜੈਕਟਿਵ n-ਸਵੈਲੋਟੇਲ।

ਐਕਸਟੈਂਡਿਡ ਰੀਅਲਜ਼ $\mathbb{R}P^1$ (ਯਾਂ ਕਿਸੀ ਵੀ $\mathbb{R}P^n$) ਦੇ ਲੀਨਿਅਰ ਆਇਸੋਮੋਰਫ਼ਿਜ਼ਮ ਕੋਓਰਡੀਨੇਟਸ ਉੱਤੇ ਨਹੀਂ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦੇ, ਇਹ ਤਾਂ ਸਿਰਫ਼ ਓਹਨਾਂ ਦੇ ਮੈਟਰੀਸਿਸ $\begin{bmatrix} u & t \\ s & v \end{bmatrix} \in GL(2,\mathbb{R})$ ਦਿੰਦੇ ਹਨ। ਕਿੰਉਕਿ ਮੈਟਰੀਸਿਸ ਜੋ ਕੁਝ ਨਹੀਂ ਕਰਦੇ ਹਨ ਡਾਏਗਨਲ ਵਿਦ ਐਂਟਰੀਜ਼ ਬਰਾਬਰ, ਓਰੀਐਂਟਏਸ਼ਨ ਪਰੀਜ਼ਰਵਿੰਗ ਲੀਨਿਅਰ ਆਇਸੋਮੋਰਫ਼ਿਜ਼ਮ $\mathbb{R}P^1$ ਹਨ ਮੈਟਰੀਸਿਸ ਦੇ ਜੋੜੇ $\pm A \in SL(2,\mathbb{R})$, ਅੱਤੇ ਜੋੜੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ -1 ਦੇ ਓਹ ਜੋ ਓਰੀਐਂਟੇਸ਼ਨ ਉਲਟ ਦਿੰਦੇ ਹਨ। (ਐਂਵੀ ਹੀ ਕਿਸੀ n ਓਡ ਲਈ, ਪਰ n ਈਵਨ ਲਈ ਮੈਟਰੀਸਿਸ $\pm I$ ਅੱਲਗ ਕੌਮਪੋਨੈਂਨਟਸ ਵਿਚ ਹਨ, ਹੁਣ ਨੋਨ-ਓਰੀਐਂਟੇਬਲ $\mathbb{R}P^n$ ਦਿਆਂ ਸਾਰਿਆਂ ਆਈਸੋਮੋਰਫ਼ਜ਼ਮਜ਼ ਤੇ $SL(n+1,\mathbb{R})$ ਇਕ ਹਨ।) ਮੈਟਰੀਸਿਸ $SL(2,\mathbb{R})$ ਪਲੇਨ $\mathbb{R}^2$ ਦਾ ਏਰੀਆ ਕਾਇਮ ਰੱਖਦਿਆਂ ਹਨ, ਇਸ ਗਰੁਪ ਦਾ ਸਰਕੂਲਰ ਡੈਫ਼ੋਰਮੇਸ਼ਨ ਰਟਰੈਕਟ $SO(2,\mathbb{R}) = S^1$ ਪਲੇਨ ਦਾ ਡਿਸਟੈਂਸ ਵੀ ਪਰੀਜ਼ਰਵ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਦੋਬਾਰਾ, ਓਸ ਦੇ ਕੋਓਰਡੀਨੇਟਸ ਦਾ ਟੋਟਲ ਓਰਡਰ ਕਿਸੀ $\odot \in \mathbb{R}^n$ ਨੂੰ ਬਣਾ ਦਿੰਦਾ ਹੈ ਇਕੁਏਸ਼ਨ ਇਣ $\mathtt{x}$ ਓਫ਼ ਡਿਗਰੀ $= n$; ਪਰ ਜਿਆਦੀ ਸਮਝਦਾਰੀ ਇਸ ਵਿੱਚ ਹੈ ਕਿ ਅਸੀ ਗ਼ੌਰ ਫ਼ਰਮਾਈਏ $\mathtt{x}$ ਦੀਆਂ ਸੱਭ ਇਕੁਏਸ਼ਨਜ਼ ਉੱਤੇ ਜਿਹਨਾਂ ਦੀ ਡਿਗਰੀ $\leq n$ ਹੈ; ਇਹਨਾਂ ਦੀ ਸਪੇਸ $\mathbb{R}P^n$ ਹੈ ਵੀ ਜਿਆਦੀ ਸੋਹਨੀ, ਇਕ ਕਲੋਜ਼ਡ n-ਮੈਨੀਫ਼ੋਲਡ; ਅਤੇ ਆਪਾਂ ਭਾਂਪ ਵੀ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਜ਼ਰੂਰੱਤ ਰੂਟ $x = \infty$ ਦੀ; ਹੋਮੋਜਿਨਾਈਜ਼ੇਸ਼ਨ ਅਤੇ ਡੂਅਲ ਅਗਿਆਤ $\mathtt{y}$ ਖੁਦ ਪ੍ਰਗੱਟ ਹੋ ਜਾਂਦੇ ਨੇ ... ਟੋਟਲ ਓਰਡਰ - ਇਕ ਮੋਰਸ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨ ਦੀ ਭਾਂਤ - $\mathbb{R}P^n$ ਨੂੰ ਵੰਢ ਦਿੰਦਾ ਹੈ ਸੈਲਸ ਤੇ ਡੂਅਲ ਸੈਲਸ ਵਿਚ; ਇਹ ਕਾਇਮ ਰਹਿੰਦੇ ਹਨ ਤਰਤੀਬ ਨਾਲ $\mathtt{x} \mapsto u\mathtt{x} + t\mathtt{y}, \mathtt{y} \mapsto v\mathtt{y}$ ਅੱਤੇ $\mathtt{x} \mapsto u\mathtt{x}, \mathtt{y} \mapsto s\mathtt{x} + v\mathtt{y}$ ਥੱਲੇ; ਪਰ ਸਾਰਿਆਂ ਮੈਟਰਿਸਇਸ $\begin{bmatrix} u & t \\ s & v \end{bmatrix} \in SL(2,\mathbb{R})$ ਦਾ ਐਕਸ਼ਨ ਦੋਆਂ ਨੂੰ ਵਿਗਾੜ ਦਿੰਦਾ ਹੈ ... ਪਰ ਟੋਟਲ ਓਰਡਰ ਤੋਂ ਹੀ ਉਤਪੱਣ ਓਹ "ਗੋਲ ਵੰਢ" -- ਜਿਹਦਾ kਥ ਹਿੱਸਾ ਬਣਾਂਦਿਆਂ ਹਨ ਸਾਰਿਆਂ ਇਕੇਏਸ਼ਨਜ਼ $\odot \in \mathbb{R}P^n$ ਜਿਨਹਾਂ ਦੇ ਮਲਟੀਪਲੀਸੀਟੀ ਨਾਲ $n - 2k$ ਐਕਸਟੈਂਡਿਡ ਰੀਅਲ ਰੂਟ ਹਨ -- ਪੂਰੀ ਕਾਇਮ ਰਹਿੰਦੀ ਹੈ ਇਸ ਐਕਸ਼ਨ ਥੱਲੇ; ਅੱਤੇ ਜਿੰਵੇ ਆਪਾਂ ਥੱਲੇ ਨੋਟ ੪੯ ਵਿਚ ਦੇਖਾਂਗੇ ਵਾਕਿਆ ਹੀ ਬੜੀ "ਗੋਲ" ਹੈ ਇਹ ਵੰਡ ... ਮੱਸਲਣ, ਅਗਰ ਇਕੁਏਸ਼ਨ ਦੇ ਫ਼ਾਇਨਾਇਟ ਰੀਅਲ ਰੂਟ ਹਨ, ਐਕਸ਼ਨ ਘੁਮਾ ਦਿੰਦਾ ਇਹ ਵੱਧਦਾ ਸਿਕਿਉਐਂਸ ਇਨਫ਼ੀਨੀਟੀ ਵਿਚੋਂ; ਜਿਸਤੋਂ ਯਾਦ ਆਂਦਾ ਹੈ ਕਿਉਬਿਕਸ ਲਈ ਵੀਏਟਾ ਦਾ ਤਰੀਕਾ : ਕਿ ਇਹ ਐਕਸ਼ਨ ਬਦੌਲੱਤ ਕੁਝ ਵੈਸਾ ਕਿਸੀ ਵੀ n ਲਈ ਸੰਭਵ ਹੈ?

੪੯. ਰੋਟੇਟ ਕਰਨਾ ਇਕੁਏਸ਼ਨ $\odot \in \mathbb{R}P^n$ ਨੂੰ, ਜਿਹਦੇ ਸੱਭ ਰੂਟ ਐਕਸਟੈਂਡਿਡ ਰੀਅਲ $[x, y]$ ਹਨ, ਬਾਏ $\pm \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ ਟੂ $\theta(\odot)$ ਇਹ ਰੂਟਸ ਓੱਤੇ ਇਨਵਰਸ ਮੈਟਰਿਕਸ ਲਗਾਕੇ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ $[x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta], 0 \leq \theta < \pi$ ਬਣਾ ਦੇਣ ਦੇ ਸੱਮਾਣ ਹੈ। ਸੋ ਜੇ $\odot$ ਦੇ ਸਾਰੇ ਰੂਟ ਫ਼ਾਈਨਾਇਟ $[x_i, 1]$ ਅੱਤੇ ਸਿੰਮਪਲ $x_1 < \cdots < x_n$ ਹਨ, ਅੱਤੇ n ਰੋਟੇਸ਼ਨਾਂ $\theta_i \neq 0$ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਇਕ ਤੋਂ ਬਾਦ ਇਕ ਇਨਫ਼ਿਨੈਟੀ ਭਾਵ $[1, 0]$ ਬਣਾਂਦੀਆਂ ਹਨ, ਤਾਂ $x_i = -\cot\theta_i$; ਯਾਨੀ ਕਿ ਓਹ ਸੱਭ ਰੋਟੇਟਿਡ ਇਕੁਏਸ਼ਨਜ਼ $\theta(\odot)$ ਜਿਨਹਾਂ ਦੀ $\mathtt{x}$ ਵਿਚ ਹੈ ਡਿਗਰੀ $n - 1$ ਓਹ ਹਨ $\theta_i(\odot)$। ਰੋਟੇਸ਼ਨਜ਼ ਬਾਕੀ ਇਕੁਏਸ਼ਨਜ਼ ਉੱਤੇ ਕਿੰਵੇ ਐਕਟ ਕਰਦੀਆਂ ਹਨ ਤੋਂ ਪਹਲਾਂ ਆਪਾਂ ਵਿਚਾਰਦੇ ਹਾਂ

ਨੋਟ ੪੮ ਦੀ ਕੌਮਪਲੈਕਸੀਫ਼ਿਕੇਸ਼ਨ:- ਜੇ ਕੋਐਫ਼ੀਸ਼ੈਂਟਾਂ ਤੇ ਅਗਿਆਤ $\mathtt{x}$ ਦਿਆਂ ਕੀਮਤਾਂ $\mathbb{C}$ ਵਿਚ ਹਨ ਅਤੇ ਆਪਾਂ ਇਹਦੀ ਜਮਾਂ ਤੇ ਜ਼ਰਬ ਇਸਤਮਾਲ ਕਰ ਰਹੇ ਹਾਂ, ਤਾਂ $\mathbb{C}P^\infty$ ਹੈ ਸਪੇਸ ਸਾਰਿਆਂ ਇਕੁਏਸ਼ਨਜ਼ ਦੀ, $\mathbb{C}P^n$ ਓਹ ਸੱਭ ਦੀ ਜਿਹਨਾਂ ਦੀ ਡਿਗਰੀ n ਯਾਂ ਘੱਟ ਹੈ, ਅੱਤੇ $\mathbb{C}^n$ ਜਿਹਨਾਂ ਦੀ ਡਿਗਰੀ n ਹੈ। ਸੋ ਮਿਲ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਵਿਭਾਜਣ $\mathbb{C}P^n = \mathbb{C}^n \cup \ldots \cup \mathbb{C}^j \cup \ldots \cup \mathbb{C}^0$ ਕੋਮਪਲੈਕਸ ਪ੍ਰੋਜੈਕਟਿਵ n-ਸਪੇਸ ਦਾ $n+1$ ਸੈਲਜ਼ ਵਿਚ, ਹਰ ਈਵਨ ਡੀਮੈਨਸ਼ਨ $0 \leq 2j \leq 2n$ ਦਾ ਇਕ। ਇਹ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇਹਦੇ ਇੰਟੀਗਰਲ ਕੋਹੋਮੋਲੋਜੀ ਗਰੁਪ ਹਨ $H^{2j}(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$। ਜੇ ਹਰ $\mathtt{x}^j$ ਨੂੰ ਕੱਟ $\mathtt{x}^j\mathtt{y}^{n-j}$ ਯਾਂ $\mathtt{y}^{n-j}$ ਲਿੱਖ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ ਇਹ ਹੀ ਓਰੀਐਂਟਿਡ ਕਲੋਜ਼ਡ $2n$-ਮੈਨੀਫ਼ੋਲਡ ਬਣ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਸਪੇਸ ਓਫ਼ ਓਲ ਹੋਮੋਜੀਨਸ

ਇਕੁਏਸ਼ਨਜ਼ ਇਣ $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ ਓਫ਼ ਡਿਗਰੀ n, ਯਾਂ ਸਾਰਿਆਂ $\mathbf{y}$ ਦਿਆਂ ਓਫ਼ ਡਿਗਰੀ $\leq n$। ਸੋ ਪਵਾਂਕਾਰੇ ਡੂਅਲ ਵਿਭਾਜਨ $\mathbb{C}P^n = {}^*\mathbb{C}^0 \cup \ldots \cup {}^*\mathbb{C}^{n-j} \cup \ldots \cup {}^*\mathbb{C}^n$ ਵੀ ਮਿਲ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਿਥੇ ${}^*\mathbb{C}^{n-j}$ ਸਪੇਸ ਹੈ ਸਾਰਿਆਂ $\mathbf{y}$ ਵਿਚ ਇਕੁਏਸ਼ਨਜ਼ ਜਿਨਹਾਂ ਦੀ ਡਿਗਰੀ $n - j$ ਹੈ।

ਹੁਣ ਕੋਈ ਵੀ ਇਕੁਏਸ਼ਨ ਪੂਰੀ ਫ਼ੇਕਟਰਆਇਜ਼ ਹੋ ਜ਼ਾਂਦੀ ਹੈ ਡਿਗਰੀ ਇਕ ਇਕੁਏਸ਼ਨਜ਼ $y\mathbf{x} - x\mathbf{y} = 0$ ਵਿੱਚ, ਭਾਵ, ਕੋਈ $\odot \in \mathbb{C}P^n$ ਦੇ ਮੱਲਟੀਪਲੀਸੀਟੀ ਸਹਿਤ n ਐਕਸਟੈਂਡਿਡ ਰੂਟ $[x, y] \in \mathbb{C}P^1 = S^2$ ਹਨ, ਭਾਵ, ਪਰੋਜੈਕਟਿਵ ਕੋਮਪਲੈਕਸ n–ਸਵੈਲੋਟੇਲ ਦਾ ਕਲੋਯੱਰ ਸਾਰਾ $\mathbb{C}P^n$ ਹੈ। $\mathbb{C}^2$ ਦਿਆਂ ਸਾਰਿਆਂ ਆਇਸੋਮੋਰਫ਼ਿਜ਼ਮਜ਼ $\begin{bmatrix} v & -t \\ -s & u \end{bmatrix} \in GL(2, \mathbb{C})$ ਓਰੀਐਂਟੇਸ਼ਨ ਕਾਇਮ ਰਖਦਿਆਂ ਹਨ, ਜਿਹੜੀਆਂ ਓਰੀਜੈਨ ਚੋਂ ਹਰ ਕੋਮਪਲੈਕਸ ਲਾਇਨ ਨੂੰ ਵੀ ਪਰੀਜ਼ਰਵ ਕਰਦਿਆਂ ਓਹ ਹਨ ਡਾਏਗਨੱਲ ਵਿਦ ਐਂਟਰੀਜ਼ ਬਰਾਬਰ, ਸੋ ਐਕਸਟੈਂਡਿਡ ਕੋਮਪਲੈਕਸ ਨੰਬਰਜ਼ S^2 ਦਿਆਂ ਆਇਸੋਮੋਰਫ਼ਿਜ਼ਮਜ਼ ਨੂੰ ਆਂਪਾਂ ਮੱਣ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜੋੜੇ $\pm A \in SL(2, \mathbb{C})$। ਅਤੇ, S^2 ਉੱਤੇ ਇਸ $SL(2, \mathbb{C})$–ਐਕਸ਼ਨ ਦੀ nਥ ਸੀਮੀਟਰਿਕ ਪਾਵਰ ਦਿੰਦੀ ਹੈ $\mathbb{C}P^n$ ਉੱਤੇ ਸੱਬਸਟੀਚਿਉਸ਼ਨਲ ਐਕਸ਼ਨ $\mathbf{x} \mapsto u\mathbf{x} + t\mathbf{y}, \mathbf{y} \mapsto s\mathbf{x} + v\mathbf{y}$।

ਆਈਸੋਮੋਰਫ਼ਿਜ਼ਮਜ਼ ਐਕਸਟੈਂਡਿਡ ਕੋਮਪਲੈਕਸ ਨੰਬਰਾ ਦਿਆਂ ਜਿਨਹਾਂ ਦਿਆਂ ਮੈਟਰਿਸਿਜ਼ $SL(2, \mathbb{R}) \subset SL(2, \mathbb{C})$ ਹਨ ਐਕਸਟੈਂਡਿਡ ਰਿਅਲ ਨੰਬਰਾ ਦੇ ਸਰਕਲ $S^1 \subset S^2$ ਤੇ $S^2 \setminus S^1$ ਦੇ ਦੋਆਂ ਕੋਮਪੋਨੈਂਟਸ ਨੂੰ ਪਰੀਜ਼ਰਵ ਕਰਦਿਆਂ ਹਨ ਅਤੇ ਕੋਂਜੂਗੇਟ ਜੋੜੇਆਂ $[x, 1], [\overline{x}, 1]$ ਉੱਤੇ ਸੀਮਿਟਰਿਕਲੀ ਐਕਟ ਕਰਦਿਆਂ ਹਨ। ਜੱਦੋਂ ਇਕੁਏਸ਼ਨ $\odot \in \mathbb{R}P^n \subset \mathbb{C}P^n$ ਜਿਸਦੇ ਇਹ ਦੋ ਰੂਟ ਹਨ ਘੁਮ ਕੇ ਬੱਣ ਜਾਂਦੀ ਹੈ $\theta(\odot)$ ਆਹ ਰੂਟ ਬੱਣ ਜਾਂਦੇ ਹਨ $[x \cos\theta - \sin\theta, x \sin\theta + \cos\theta] = [\frac{x\cos\theta - \sin\theta}{x\sin\theta + \cos\theta}, 1]$ ਤੇ ਇਹਦਾ ਕੋਂਜੂਗੇਟ। ਜੇ $0 < \theta < \pi$ ਤਾਂ $\frac{x\cos\theta - \sin\theta}{x\sin\theta + \cos\theta} = x \iff x = \pm\, i$, ਸੋ $S^2 \setminus S^1$ ਦਾ ਵਿਭਾਜਣ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕੋਂਜੂਗੇਟ ਸਰਕੁਲਰ $SO(2, \mathbb{R})$–ਓਰਬਿਟਸ ਵਿਚ, ਗਿਰਦ ਇਹ ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ $[\pm i, 1]$ ਦੇ, ਜੋ ਰੂਟ ਹਨ ਇਕਲੌਤੀ $\mathbb{R}P^2$ ਦੀ ਇਕੁਏਸ਼ਨ $x^2 + y^2 = 0$ ਦੇ, ਜੋ ਟੱਸ ਤੋਂ ਮੱਸ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ।

ਇਹਦੇ ਲਈ : ਜੇ n ਓਡ ਹੈ ਤਾਂ ਐਕਸਟੈਂਡਿਡ ਰਿਅਲ ਨੰਬਰਾਂ S^1 ਦਿਆਂ ਰੋਟੇਸ਼ਨਜ਼ ਦਾ $\mathbb{R}P^n$ ਉੱਤੇ ਐਕਸ਼ਨ ਫ਼ਰੀ ਹੈ, ਪਰ ਜੇ n ਈਵਨ ਹੈ ਤਾਂ $\mathbb{R}P^n$ ਦੀ ਇਕੁਏਸ਼ਨ $(x^2 + y^2)^{n/2} = 0$ ਇਸ ਫ਼ਲੋ ਦਾ ਇਕਲੌਤਾ ਫ਼ਿਕਸਡ ਪੌਐਂਟ ਹੈ। ਅੱਗੇ ਇਸ ਸਿੰਗੁਲੈਰੀਟੀ ਦੀ ਡਿਗਰੀ ਇਕ ਹੈ -- ਜਿਸਤੋਂ ਪੱਕਾ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ n ਓਡ ਲਈ ਓਏਲਰ ਕੈਰੈਕਟਰਸਟਿਕ $e(\mathbb{R}P^n)$ ਜ਼ਿਰੋ ਹੈ ਪਰ ਈਵਨ n ਲਈ ਇਕ -- ਕਿਉਂਕਿ ਇਹਦੇ ਕੁਝ ਲਿੰਕ ਫ਼ਲੋ ਪਰੀਜ਼ਰਵ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਐਸੇ ਕੋਈ ਲਿੰਕ ਉੱਤੇ ਓਹਦੇ ਓਰਬਿਟ ਫ਼ਾਇਬਰ ਹਨ ਇਕ ਹੋਪਫ਼ ਮੈਪ $S^{n-1} \to \mathbb{C}P^{\frac{n-2}{2}}$ ਦੇ। ਪਰ ਗਲੋਬੱਲੀ ਸਾਡੀ ਇਹ $\mathbb{R}P^n$ ਦੀ ਸਰਕਲਾਂ ਨਾਲ ਫ਼ੋਲੀਏਸ਼ਨ ਕੋਈ ਵੀ ਫ਼ਾਇਬਰੇਸ਼ਨ ਤੋਂ ਕਾਫ਼ੀ ਦੂਰ ਹੈ, ਮਸਲਣ, ਇਹਦੇ ਕੱਸਪਾਈਡਲ ਓਰਬਿਟ ਦੇ ਹੋਲੋਨੋਮੀ ਗਰੁਪ ਦਾ ਓਰਡਰ ਸਾਰੇ ਨੰਬਰਾਂ $0 < n - 2k \leq n$ ਦਾ ਸੱਭ ਤੋਂ ਛੋਟਾ ਗੁਣੱਜ ਹੈ। ਪਰ ਇਸ ਸਰਲ ਅਤੇ ਆਕਰਸ਼ਕ ਫ਼ੋਲੀਏਸ਼ਨ -- ਜੋ ਯਾਦ ਦਿਲਾਂਦੀ ਹੈ ਐਪਸਟਾਇਨ, ਸੱਲੀਵਨ, ਮਾਰਗੁਲੀਜ਼ ਆਦਿ ਦਿਆਂ ਐਸੀਆਂ ਪਰ ਕਿਤੇ ਜਟਿਲ ਫ਼ੋਲੀਏਸ਼ਨਜ਼ ਦੀ -- ਨੂੰ ਆਪਾਂ ਅਗੇ ਵਿਚਾਰਾਂਗੇ ਕਿਤੇ ਹੋਰ।

ਵਿਪ੍ਰੀਤ $SO(2, \mathbb{R}) \subset SL(2, \mathbb{R})$ ਦੇ ਜਿਹਦਾ ਐਕਸਟੈਂਡਿਡ ਰਿਅਲਜ਼ $S^1 \subset S^2$ ਉੱਤੇ ਐਕਸ਼ਨ ਟ੍ਰਾਂਜ਼ਟਿਵ ਹੈ, ਕੋਮਪਲੈਕਸੀਫ਼ਾਇਡ ਮੈਟਰਰਿਸਿਜ਼ $SO(2, \mathbb{C}) \subset SL(2, \mathbb{C})$ ਦਾ ਰੀਮਾਣ ਸਫ਼ਿਅਰ S^2 ਉੱਤੇ ਐਕਸ਼ਨ ਟ੍ਰਾਂਜ਼ਟਿਵ ਨਹੀਂ : ਕਿਉਂਕਿ $\pm i$ ਫ਼ਿਕਸਡ ਹੀ ਰੈਹਣਦੇ ਹਣ ਭਾਂਵੇ ਆਪਾਂ $\cos\theta$ ਅਤੇ $\sin\theta$ ਨੂੰ ਸੱਭ $\theta \in \mathbb{C}$ ਤੱਕ ਐਨੇਲਿਟਿਕਲੀ ਕੋਨਟੀਨਿਉ ਹੀ ਕਰ ਦੇਵੀਏ। ਪਰ ਹੁਣ ਬਾਕੀ ਜਗਹਾ ਭੱਰ ਦੇਣ ਵਾਲੇ ਸਰਕੂਲਰ $SO(2, \mathbb{R})$–ਓਰਬਿਟ ਇਕੱਠੇ ਹੋ ਇਸ ਦੋ ਡਾਇਮੈਨਸ਼ਨਲ ਗਰੁਪ ਦਾ ਇਕੋ ਓਰਬਿਟ ਬਣ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਯਾਣੀ ਕਿ, $[\pm i, 1]$ ਨੂੰ ਛੱਡ ਬਾਕੀ ਸਭ ਪੌਐਂਟ $\infty = [0.1]$ ਦੇ $SO(2, \mathbb{C})$–ਓਰਬਿਟ ਵਿਚ ਹਨ, ਯਾਣੀ ਕਿ, ਮੈਰੋਮੋਰਫ਼ਿਕ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨ $-\cot\theta$ ਪਲੇਣ $\mathbb{C}$ ਨੂੰ ਪੀਰੀਅਡ π ਨਾਲ $S^2 \setminus \pm i = (\mathbb{C} \cup \infty) \setminus \pm i$ ਉੱਤੇ ਲਪੇਟ ਦਿੰਦੀ ਹੈ:- ਕਿਉਂਕਿ $-\cot(it) = i\frac{e^{-t} + e^t}{e^{-t} - e^t}$, ਸੋ ਈਮੈਜੀਨੈਰੀ ਲਾਇਨ $\theta = it, -\infty < t < \infty$ ਦਾ $-\cot$ ਥੱਲੇ ਇਮੇਜ ਹੈ $S^2 = \mathbb{C} \cup \infty$ ਉੱਤੇ ਇਕ ਓਪੈਣ ਆਰਕ ਜੋ $+i$ ਤੋਂ ਵਾਏਆ ∞ ਹੁੰਦੀ $-i$ ਜਾਂਦੀ ਹੈ, ਸੋ ਇਹ ਸਾਰੇ ਸਰਕੁਲਰ $SO(2, \mathbb{R})$–ਓਰਬਿਟਸ ਨੂੰ ਕਟਦੀ ਹੈ। □

ਇਹਨਾਂ ਨਾਲ ਮਿਲਦੇ–ਜੁਲਦੇ $SL(2, \mathbb{R})$ ਬਾਰੇ ਪੀਕਾਰ ਦੇ ਵਿਚਾਰ ਅੱਗੇ ਦੱਸਦੇ ਹਨ ਕਿ, ਕਾਂਸਟੈਂਟਸ ਨੂੰ ਛੱਡ ਕੋਈ ਮੈਰੋਮੋਰਫ਼ਿਕ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨ ਦੋ ਤੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਕੀਮਤਾਂ ਨਹੀਂ ਛੱਡਦੀ, ਅੱਤੇ ਐਸੇ ਹੀ ਕੁਝ ਨੀਵੈਨਲੀਨਾ, ਵਾਐਲ, ਅਹਲਫ਼ੋਰਜ਼ ਆਦਿ ਦੇ ਨਤੀਜੇ ਵੀ ਹਨ ਬਾਕੀ ਦੇ ਰੀਮਾਨ ਸਰਫ਼ੈਸਿਸ $M^2 \neq S^2$ ਯਾਂ ਫ਼ੇਰ $\mathbb{C}P^n, n > 1$ ਵਿੱਚ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹੋਲੋਮੋਰਫ਼ਿਕ ਫ਼ੰਕਸ਼ਨਜ਼ ਲਈ। ਦਰਅੱਸਲ ਕਈ ਹੋਰ ਨਾਮ ਵੀ ਲੈਣੇ ਬਣਦੇ

ਸਨ ਪਿਛਲੇ ਕਈ ਨੋਟਾਂ ਵਿਚ ਜੋ ਅਜੇ ਤਕ ਮੈਂ ਨਹੀਂ ਲਿੱਤੇ ਹਨ। ਕੁਝ ਹਦ ਇਸ ਲਈ ਵੀ ਕਿ ਮੈਂ ਤੋਹਾਣੂੰ ਤੇ ਸ਼ਾਇਦ ਖੁਦ ਨੂੰ ਵੀ ਜ਼ਿਆਦਾ ਨਾਮ ਲੈਕੇ ਫ਼ਜ਼ੂਲ ਡਰਾਣਾ ਤੇ ਇਕ ਸਿਧੇ ਸਾਧੇ ਰਸਤੇ ਤੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾ ਭਟਕਾਣਾਂ ਨਹੀਂ ਚਾਂਹਦਾ ਸਾਂ : ਜਿਸ ਮੁਕਾਮ ਤੇ ਅੱਸੀ ਹੁਣ ਖੱੜੇ ਹਾਂ ਏਥੋਂ ਕਿੱਣੀਆਂ ਹੀ ਸੁੰਦਰ ਥੀਉਰੀਆਂ ਲੰਘਦੀਆਂ ਹਨ ! ਓਹ ਟੱਪੂਸੀਆਂ ਮਾਰਦੀ ਨਿੱਕੀ ਬੱਚੀ ਪਿਛੇ ਪਿਛੇ, ਇਕ ਅੱਤ ਪ੍ਰਾਚੀਨ ਭੁੱਲੀ ਰੱਚਣਾ ਤੋਂ ਚੱਲਦੇ ਆਪਾਂ ਅੱਜ ਦੇ ਇਹ ਚੈਰਇੰਗ ਕ੍ਰੌਸ ਏਣੇ ਆਰਾਮ ਨਾਲ ਇਸੀ ਲਈ ਪਹੁੰਚ ਗਏ ਹਾਂ ਕਿਉਂਕਿ ਅਸੀਂ ਬਹੁਤ ਹੀ ਕੁਦਰਤੀ ਰਸਤਾ ਲਿਤਾ ਸੀ : ਪੀ ਜੀ ਐਂਡ ਆਰ ਦੀ ਕਾਰਟੀਸ਼ਅਨ ਹੋਂਦ ਅੱਤੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ ਪਾ ਦਿੱਤੀ ਜਮਾਂ ਅੱਤੇ ਜ਼ਰਬ ! ਐਸੀ ਸੈਰ ਦੋਰਾਣ ਕਿੱਣੇ ਹੀ ਖਿਆਲ ਆਂਦੇ ਅੱਤੇ ਫ਼ੇਰ ਧੁੰਦਲੇ ਪੈ ਜਾਂਦੇ ਹਨ : ਹੇਠਲੇ ਨੋਟਸ ੫੦, ਜਿਹਣਾਂ ਉਤੇ ਮੈਂ ਕੰਮ ਜ਼ਾਰੀ ਰੱਖਾਂਗਾ, ਬਦੌਲਤ ਸ਼ਾਇਦ ਧੁੰਦਲੇ ਫ਼ੇਰ ਸਾਫ਼ ਹੋ ਜਾਣ। ਅੱਤੇ ਉਮੀਦ ਹੈ ਕਿ, ਉਪੱਰ ਵਾਲੇ ਦੀ ਮਰਜ਼ੀ ਨਾਲ, ਇਹ ਸੈਰ ਕੁਝ ਹੋਰ ਅੱਗੇ ਵੀ ਚੱਲੇ ਗੀ।

ਕੇ ਐਸ ਸਰਕਾਰੀਆ

੩੦ ਸਤੰਮਬਰ ੨੦੧੮