ਬੀਜ ਗਣਿਤ ਦਾ ਮੂਲ ਮਸਲਾ

بِج گِنت دا مُل مسلا

ਥੀਓਰਮ : ਓਹ ਸਭ ਇਕੂਏਸ਼ਨਾਂ ਜਿਹੜੀਆ ਆਪਾਂ ਸਕੂਲੇ

تھیاورم : او سبھ اِکےاےشاں جِحڑیاں آپاں سکوُلے

ਕਵਾਡਰੇਟਿਕ ਫੌਰਮੂਲੇ ਨਾਲ ਹਲ ਕਰਦੇ ਸਾਂ ਓਹ

کواڈرےٹِک پھوَرموُلے نال حل کردے ساں اوح

ਬਣਾਂਦੀਆਂ ਹਨ ਮੋਬੀਅਸ ਸਟਰਿਪ !

بناندیاں حن موبیاس سٹرِپ !

ਪਰੂਫ : ਕੱਮਪਲੈਕਸ ਨੰਬਰ ਸਕੂਲੇ ਨਹੀਂ ਸਨ ਪਰ ਆਪਾਂ

پروُپھ : کمّپ لےکس ن نمبر سکوُلے نحیں سن پر آپاں

ਸਿੱਖ ਲਿੱਤਾ ਸੀ ਕਿ ਕਦੋਂ ਤੇ ਕਿਸ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਡਿਗਰੀ ਦੋ ਦੀ

سِخّ لِتا سی کِ کدوں تے کِس تریکے نال ڈِگری دو دی

ਇਕੂਏਸ਼ਨ $ax^2 + bx + c = 0$ ਨੂੰ ਹਲ ਕਰਣਾ ਹੈ :

اِکّااےش $ax^2 + bx + c = 0$ نوُں حل کرنا ہےَ :

ਮਾਰੋ ਗੁਣਾ 4a ਨਾਲ ਅੱਤੇ ਕਰੋ "ਵਰਗ ਪੂਰਤੀ" ਟੂ ਗੈਟ

مورو گُنا 4a نال اَتے کرو "ورگ پوُرتی" ٹوُ گےٓ

$(2ax + b)^2 - (b^2 - 4ac)$ ਜਿਹਦੇ ਫੈਕਟਰ ਓਦੋਂ ਤੇ

$(2ax + b)^2 - (b^2 - 4ac)$ جحدے پھےَکٹر اوددں تے

ਸਿਰਫ਼ ਓਦੋਂ ਹੀ ਮੁਨਾਸਿਬ ਹਨ ਜੇ

سرف اوددں حی مُناسِب حن جے

$b^2 - 4ac \geq 0$ ਸਹੀ ਹੈ। ਹੋਰ ਅੱਗੇ ਦੋਆਂ ਰੂਟਾਂ ਦਾ ਰੱਟਾ

$b^2 - 4ac \geq 0$ سحی ہےَ ۔ حو اَگےَ دوآں روُاں دا رَٹا

ਵੀ ਲੱਗਾ ਲਿੱਤਾ ਸੀ : ਕਵਾਡਰੇਟਿਕ ਫੌਰਮੂਲਾ !

وی لَگا لِتا سی : کواڈرےٹِک پھوَرموُلے !

ਹੋਮੋਜੀਨੱਸ ਡਿਗਰੀ ਦੋ ਦਿਆਂ ਇਕੂਏਸ਼ਨਾਂ

حوموجینس ڈِگری دو دِآں اِکےاےشاں

$ax^2 + bxy + cy^2 = 0$ ਵੀ ਕੁਝ ਚਿਰ ਲਈ ਆਈਆਂ ਸਨ ਅੱਤੇ

$ax^2 + bxy + cy^2 = 0$ وی کُجھ چِر لای آایاں سن اًتے

ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਵੀ ਉਸੇ ਵਿਧੀ ਯਾਂ ਫੌਰਮੂਲੇ ਨਾਲ ਉਸੇ

اِحناں نوُں وی اُسے وِدھی یاں پھوًرموُلے نال اُسے

ਜ਼ਰੂਰੀ ਤੇ ਕਾਫ਼ੀ ਸ਼ਰਤ $b^2 - 4ac \geq 0$

ظروُری تے کافی شرت $b^2 - 4ac \geq 0$

ਥੱਲੇ ਹਲ ਕਰਦੇ ਸਾਂ।

ھلّے حل کردے ساں ۔

ਇਹ ਹੋਮੋਜੀਨਸ ਇਕੂਏਸ਼ਨਾਂ ਬਣਾਂਦੀਆਂ ਹਨ ਸਪੇਸ RP^2

اِح حوموجینس اِکواےشاں بناندیاں حن سپےس RP^2

ਸਾਰੇ 3-ਟਪਲ (a,b,c) ਨੌਟ ਔਲ ਜ਼ੀਰੋ ਦੀ ਜਿੱਥੇ ਗੁਣਜ

سارے 3- تپل (a,b,c) نوٹ اوّل شیرو دی جتھے گُنج

(at,bt,ct) ਭਿੰਨ ਨਹੀਂ, i.e.,

(at,bt,ct) بھِنن نحیں ,i.e.,

ਸਪੇਸ ਔਫ ਲਾਇਨਜ਼ ਥਰੂ ਦਾ ਔਰੀਜਨ ਔਫ ਸਪੇਸ R^3

سپےس اوّپھ لاائنش تھرُو دا اوّریجن اوّ سپےس R^3

ਸਾਰੇ 3-ਟਪਲ (a,b,c) ਦੀ, i.e.,

سارے 3- تپل (a,b,c) دی ,i.e.,

ਸਪੇਸ ਸਾਰੇ ਜੋੜੇਆਂ ± P ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿਚ ਇਹ ਲਾਇਨਾਂ

سپےس سارے جھڑےآں ± P جنھاں وِچ اِح لااِن

ਕੱਟਦਿਆਂ ਹਨ ਸਰਫ਼ੈਸ S^2 ਡੀਫ਼ਾਇਨਿਡ ਬਾਏ

کٹدِآں حن سرفےس S^2 ڈی فااِنڈ بواے

$a^2 + b^2/2 + c^2 \ = 1$ ਨੂੰ।

۔ نوں $a^2 + b^2/2 + c^2 \ = 1$

ਸੋ ਇਕੁਏਸ਼ਨਜ਼ ਵਿੱਚ $b^2 - 4ac \geq 0$ ਬਣਾਂਦੀਆਂ ਹਨ ਓਹ

سو اِکُاےشنز وِد $b^2 - 4ac \geq 0$ بناندیآن حن اوح

ਸਬਸਪੇਸ RP^2 ਦੀ ਜੋ ਮਿਲਦੀ ਹੈ ਚਿਤਰ ਦੇ ਸ਼ੇਡਿਡ ਹਿੱਸੇ

سبسپےس RP^2 دی جو مِلدی حےَ چتر دے شےڈِڈ حِسے

$-1 \ \leq a + c \leq +1$ ਦੇ ਆਹਮਣੇ ਸਾਹਮਣੇ ਦੇ ਪੋਐਂਟਾ ਨੂੰ

$-1 \ \leq a + c \leq +1$ دے آحمنے ساحمنے دے پواےٗنٹان نوں

ਜੋੜ ਕੇ, i.e., ਸਪੇਸ ਜੋ ਬਣਦੀ ਹੈ ਜੇ ਆਪਾਂ ਇਕ ਪੱਟੀ ਦੇ

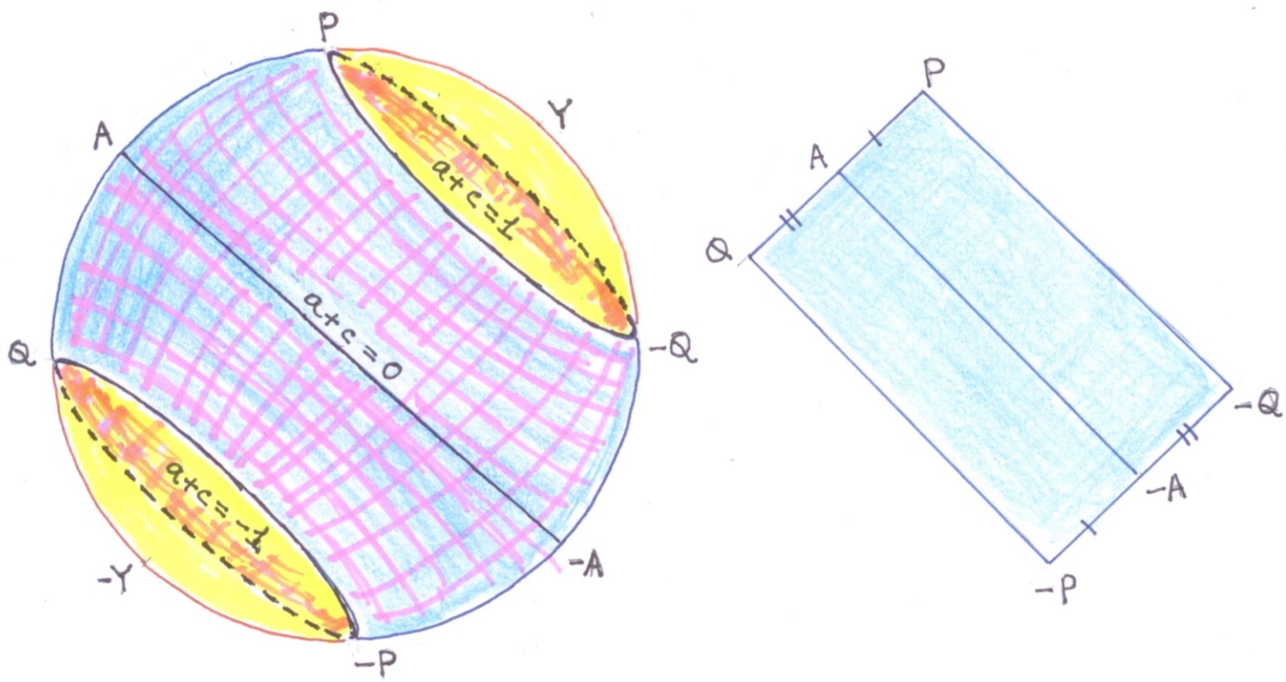
جوڑ کے, i.e., سپےس جو بندی حےَ جے آپاں اِک پٹّی دے

ਇਕ ਕੰਢੇ ਨੂੰ ਜੋੜ ਦਈਏ ਵਿਰੋਧੀ ਕੰਢੇ ਨਾਲ

اِک کنڈھے نوں جوڑ دایاے وِرودی کنڈھے نال

180 ਡਿਗਰੀ ਦੇ ਮੋੜ ਤੋਂ ਬਾਦ॥

180 ڈیگری دے موڑ توں باد۔



Notes

1. Talwinder Singh ਗੁਰਮੁਖੀ ਸ਼ਾਹਮੁਖੀ (Gurmukhi Shahmukhi) Chetna Parkashan (Ludhiana) is the qaida I used. Hopefully my errors of transliteration will tend to zero with time. I was unable to obtain Shahmukhi fonts like those in the qaida. Luckily *full* Urdu fonts—most lack zer, zabar, pesh, etc., and curiously most typing Urdu are happy enough to do it a bit telegraphically—are *almost* sufficient: the equivalent of ਣ was missing, so I used that of ਠ.

2. RP^2 is tied to one-point perspective drawing, but in the first drawing above I used a two-point perspective: the half towards –Y is as seen by one eye and that towards Y by the other! In my defense let me recall that multi-point perspective is widely used in art.

K S Sarkaria