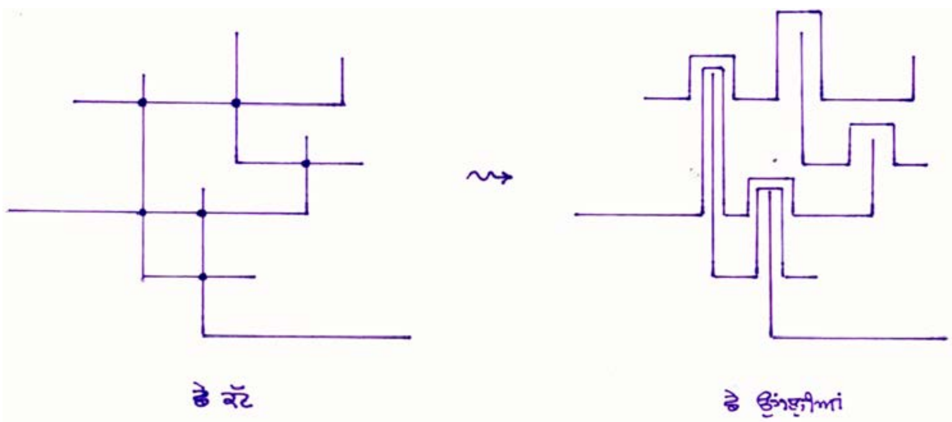
ਉਂਗਲ਼ੀਆਂ ਅਤੇ ਟਾਈਲਾਂ

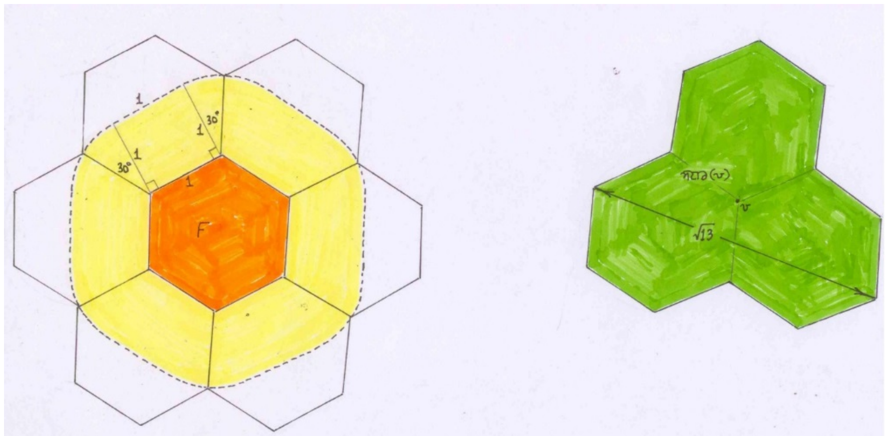
ਥੀਓਰਮ ਅਗਰ ਪਲੇਨ ਵਿੱਚ ਗਿਣਤੀ ਦੇ ਕੁਝ ਵੱਖ ਵੱਖ ਪੋਇੰਟਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇਆਂ ਦੀ ਆਪਸੀ ਦੂਰੀ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਇਕ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀ ਓਹਨਾਂ ਨੂੰ ਇੰਜ ਡਿਸਜੋਇੰਟ ਆਰਕਸ ਨਾਲ ਜੋੜ ਸੱਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਹਰ ਆਰਕ ਦਾ ਵਿਆਸ ਇਕ ਸਥਿਰ ਅੰਕ α ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੋਵੇ।

ਪਰੂਫ਼ ੧ ਲਓ ਇਕ ਤਰੀਕਾ $\alpha = \sqrt{2}$ ਨਾਲ ਜਿਹੜਾ ਐਸੀ ਐਕਸੀਸ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਹਰ ਹੋਰੀਜ਼ੋਂਟਲ ਯਾਂ ਵਰਟੀਕਲ ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੇ ਪੋਇੰਟਸ ਵਿੱਚੋਂ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਇਕ ਪੋਇੰਟ ਹੈ। ਪਹਲਾਂ ਹਰ ਜੋੜੇ ਨੂੰ ਜੋੜਦੋ ਇਸ ਐਂਗਲ ਨਾਲ : ਨਿੰਵੇ ਪੋਇੰਟ ਤੋਂ ਚੱਲੋ ਐਕਸ ਐਕਸਿਸ ਦੀ ਉਸ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਕਿ ਇਕ ਨੱਬੇ ਡਿੱਗਰੀ ਦਾ ਮੋੜ ਹੁਣ ਲੈ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਉੱਪਰ ਆਪਾਂ ਨੂੰ ਦੂਜੇ ਪੋਇੰਟ ਤਕ। ਇਹ ਐਂਗਲਾਂ ਦਰਮਿਆਨ ਜਿਹ ਕੋਈ ਕੱਟ ਹਨ ਓਹ ਆਪਾਂ ਹੁਣ ਖ਼ਾਰਿਜ ਕਰਾਂਗੇ ਉੱਤੇਓਂ ਥੱਲੇ ਵਲ। ਇੱਕੋ ਉਂਚਾਈ ਵਾਲੇ ਸਾਰੇ ਕੱਟ ਇੱਕੋ ਐਂਗਲ ਦੀ ਹੋਰੀਜ਼ੋਂਟਲ ਬਾਂਹ ਉੱਤੇ ਹਨ। ਇਸ ਐਂਗਲ ਦੀ ਜੱਗਹਾ ਹੁਣ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕਰੋ ਇਹ ਉਂਗਲ਼ੀਆਂ ਵਾਲਾ ਐਂਗਲ : ਐਂਗਲ ਦੀ ਖੜੀ ਬਾਂਹ ਨੂੰ ਓਂਵੇ ਹੀ ਰਹਿਣ ਦੇਵੋ ਪਰ ਲੇਟੀ ਬਾਂਹ ਦੇ ਹਰ ਕੱਟ ਦੋਆਲੇਓਂ ਇਕ ਛੋਟੀ ਜੇਹੀ ਇੰਟਰਵਲ ਹਟਾ ਕੇ ਓਹਦੇ ਦੋਂਵੇ ਸਿਰੇ ਹੁਣ ਜੋੜ ਦੇਵੋ – ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ – ਇਕ ਆਰਕ ਨਾਲ ਜਿਹੜੀ ਉੱਤੇ ਜਾਂਦੀ ਅਤੇ ਕੱਟਣ ਵਾਲੇ ਐਂਗਲ ਦੀ ਨੇੜੇਓਂ ਪਰਕੱਰਮਾ ਕਰਦੀ ਹੋਈ ਫ਼ੇਰ ਥੱਲੇ ਵਾਪਿਸ ਆਉਂਦੀ ਹੈ। ਆਹ ਉਂਗਲ਼ੀ ਏਨੀ ਨੇੜੇ ਹੈ ਕਿ ਇਸ ਦੀ ਉਂਚਾਈ 1 ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ। ਦੂਜੇ ਆਪਾਂ ਖਿਆਲ ਰੱਖਾਂਗੇ ਕਿ ਥੱਲਲੇ ਕੱਟਾ ਨੂੰ ਖਾਰਿਜ ਕਰਣ ਵਾਲਿਆਂ ਉਂਗਲ਼ੀਆਂ ਹੋਰ ਵੀ ਪੱਤਲੀਆਂ ਹਨ ਤਾਂਕੀ ਓਹ ਉਤਲੀਆਂ ਉਂਗਲ਼ੀਆ ਵਿਚ ਫ਼ਿਟ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। ਸਾਰਾ ਨਵਾਂ ਉਂਗਲ਼ੀਆਂ ਵਾਲਾ ਐਂਗਲ ਪੁਰਾਨੇ ਐਂਗਲ ਦੀ ਹੋਰੀਜ਼ੋਂਟਲ ਬਾਂਹ ਉੱਤੇ ਉਂਚਾਈ 1 ਦੇ ਉਸਾਰੇ ਰੇਕਟੈਂਗਲ ਅੰਦਰ ਹੈ। ਸੋ ਇਹਦਾ ਵਿਆਸ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਨੰਬਰ $\sqrt{2}$ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ। ਕੀਉ ਈ ਡੀ।



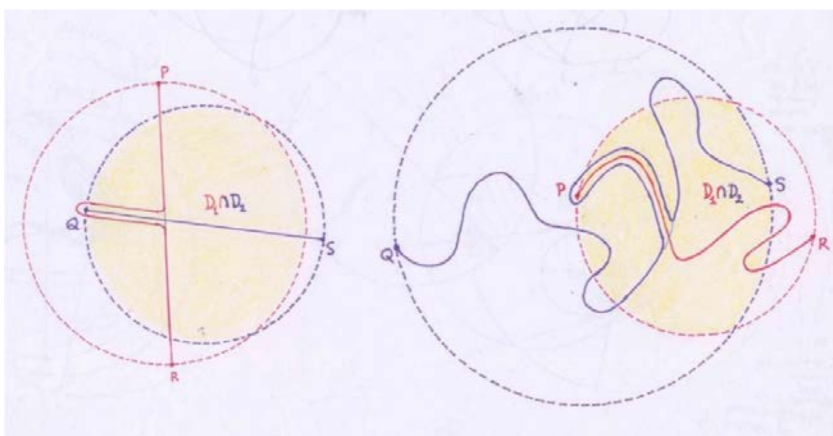
ਪਰੂਫ਼ ੨ ਇਹ ਤਰੀਕਾ ਕਿਤੇ ਵੱਡੇ ਨੰਬਰ $\alpha = \sqrt{13}$ ਨਾਲ ਹੀ ਕੰਮ ਕਰਦਾ ਹੈ ਪਰ ਇਸ ਦਾ ਅਪਣਾ ਹੀ ਲੁਤਫ਼ ਹੈ। ਆਪਾਂ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕਰਾਂਗੇ ਇਕ ਹੈਕਸਾਗਨਲ ਟਾਈਲਿੰਗ ਭੁਜਾ ਇਕ ਦਿਆਂ ਟਾਈਲਾਂ ਨਾਲ ਅਤੇ ਐਸੀ ਕਿ ਦਿੱਤੇ ਪੋਇੰਟ ਟਾਈਲਾਂ ਦੇ ਅੰਦਰ ਹਨ। ਇਕ ਇਕ ਕਰਕੇ ਆਪਾਂ ਜੋੜੇਆਂ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਡਿਸਜੋਇੰਟ ਆਰਕਸ ਨਾਲ ਜੋੜਾਂਗੇ ਕਿ ਜੇ ਕੋਈ ਆਰਕ ਕਿਸੇ ਵੀ ਟਾਈਲ ਨੂੰ ਮਿਲਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਯਾਂ ਤਾਂ ਓਹ ਪੁਰੀ ਦੀ ਪੁਰੀ ਉਸ ਦੇ ਅੰਦਰ ਹੈ ਯਾਂ ਫ਼ਿਰ ਓਹਦੀ ਬਾਉਂਡਰੀ ਨੂੰ ਇੱਕੋ ਬਾਰ ਇਕ ਭੁਜਾ ਵਿੱਚ ਕਟਦੀ ਹੈ। ਸੋ ਕਿਸੇ ਵੀ ਟਾਈਲ ਦੇ ਓਹ ਸਾਰੇ ਦੁੱਜੇ ਪੋਇੰਟ ਜੋ ਇਹ ਆਰਕਾਂ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹਨ ਹਮੇਸ਼ਾ ਬਣਾਂਦੇ ਹਨ ਇਕ ਪਾਥ ਕੋਨੈਕਟਿਡ ਸੈਟ। ਸੋ ਅਗਰ ਅਗਲੇ ਜੋੜੇ ਦੇ ਦੋਣੋ ਪੋਇੰਟ ਇਕੋ ਟਾਈਲ F ਦੇ ਵਿੱਚ ਹਨ ਤਾਂ ਓਹਨਾਂ ਨੂੰ ਆਰਾਮ ਨਾਲ ਆਪਾਂ ਇਹਦੇ ਅੰਦਰ ਹੀ ਇਕ ਹੋਰ ਡਿਸਜੋਇੰਟ ਆਰਕ ਨਾਲ ਜੋੜ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਅਗਰ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕੋ ਪੋਇੰਟ F ਅੰਦਰ ਹੈ ਤਾਂ ਓਹਦਾ ਹਾਣੀ ਇਸ ਟਾਈਲ ਦੇ ਕੋਈ ਵਰਟੈਕਸ v ਉੱਤੇ ਇਨਸੀਡੈਂਟ ਦੂਜੀਆਂ ਦੋ ਟਾਈਲਾਂ ਦੇ ਵਿਚੋਂ ਇਕ ਵਿਚ ਹੋਵੇਗਾ ਅਤੇ ਦੋਨਾਂ ਦਰਮੀਆਨ ਲਾਈਨ ਸੈਗਮੈਂਟ ਇਸ ਸਟਾਰ(v) ਵਿਚ ਰਹੇਗੀ। ਇਹ ਇਸ ਲਈ ਕਿ ਜ਼ਾਹਿਰ ਹੈ ਕਿ ਐਸੀ ਕੋਈ ਵੀ ਸੈਗਮੈਂਟ ਅਗਲੀ ਤਸਵੀਰ ਦੀ ਪੀਲੀ ਪੱਟੀ ਤੋਂ ਬਹਾਰ ਨਹੀਂ ਜਾ ਸਕਦੀ। ਸੋ ਅਪਣੇ ਪੋਇੰਟ ਦਾ ਹਾਣੀ ਇਕ ਐਸੀ ਟਾਈਲ G ਵਿਚ ਹੈ ਜਿਹਦੀ ਇਕ ਬਾਂਹ e ਟਾਈਲ F ਦਿਆਂ ਛੇ ਬਾਂਹਾਂ ਵਿਚੋਂ ਇਕ ਹੈ। ਸੋ ਆਪਾਂ ਦੋਨਾਂ ਪੋਇੰਟਾਂ ਨੂੰ ਇਹਨਾਂ ਦਿਆਂ ਆਪਣੀਆਂ ਟਾਈਲਾਂ

ਅੰਦਰ ਜੋੜ ਸਕਦੇ ਹਾਂ – ਬਗੈਰ ਪੁਰਾਣੀਆਂ ਆਰਕਾਂ ਨੂੰ ਕੱਟੇ – ਇਸ ਬਾਂਹ e ਦੇ ਇਕੋ ਪੋਇੰਟ ਨਾਲ। ਅੰਤ ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ ਸਟਾਰ(v) ਦਾ ਵਿਆਸ $\sqrt{13}$ ਹੈ। ਕਿਊ ਈ ਡੀ।



ਪਰੂਫ਼ ੩ ਦਰਅੱਸਲ ਕੋਈ ਵੀ $\alpha > 1$ ਕੰਮ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਕੋਰੋਲੱਰੀ ਹੈ ਹੇਠਲਿਖ਼ਤ ਨਤੀਜੇ ਦੀ ਜੋ ਲਾਗੂ ਹੈ ਇਕ ਓਪਣ ਅਤੇ ਡੇਨਸ ਕੌਨਡੀਸ਼ਨ ਥੱਲੇ।

(ੳ) ਅਗਰ ਓਹ ਸਰਕੱਲ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇ ਵਿਰੋਧੀ ਪੋਇੰਟ ਹਨ ਅਤੇ ਓਹਨਾਂ ਨੂੰ ਜੋੜਦੇ ਵਿਆਸ ਦੋ ਦੋ ਕਰਕੇ ਅਤੇ ਆਰ ਪਾਰ ਹੀ ਕਟ ਸਕਦੇ ਹਨ ਤਾਂ ਇਹ ਸੈਗਮੈਂਟਸ ਦੇ ਸਾਰੇ ਕੱਟ ਇੰਜ ਖ਼ਾਰਿਜ ਕੀਤੇ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ ਕਿ ਨੰਵੀਆਂ ਡਿਸਜੋਇੰਟ ਆਰਕਸ ਵੀ ਆਪਣੇ ਸਿਰੇਆਂ ਨੂੰ ਛੱਡ ਓਹਨਾਂ ਚੱਕਰਾਂ ਦੇ ਅੰਦਰ ਹੀ ਹਨ ਅਤੇ ਸੈਗਮੈਂਟਸ ਦੇ ਯੁਨੀਅਨ ਦੇ ਅੱਤ ਕਰੀਬ ਹਨ।

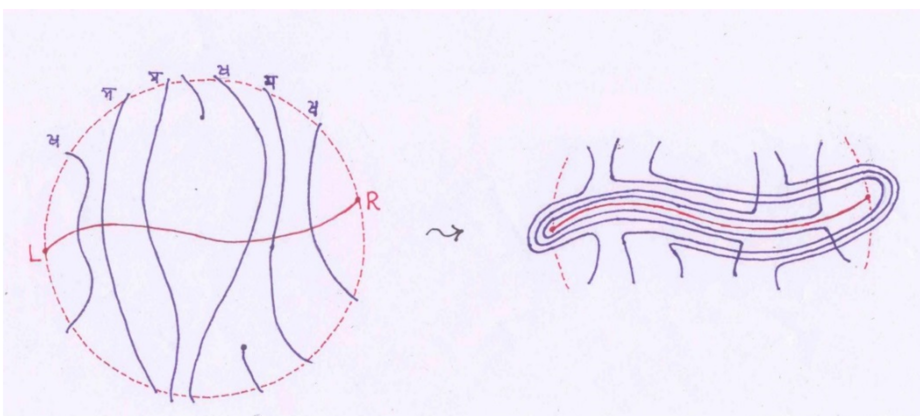


ਪਰ ਇਸ ਦਾਅਵੇ ਨੂੰ ਸਥਾਪਿਤ ਕਰਨਾ ਹੈ ਕੁਝ ਟੇਡੀ ਖੀਰ ਜਿੰਵੇ ਕਿ ਸਿਰਫ਼ ਦੋ ਜੋੜੇਆਂ {P,R} ਅਤੇ {Q,S} ਵਲ ਗੌਰ ਫ਼ਰਮੌਅੱਣ ਨਾਲ ਹੀ ਜ਼ਾਹਿਰ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਅਗਰ ਸੈਗਮੈਂਟਸ PR ਅਤੇ QS ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ ਤਾਂ ਇਹ ਕਟ ਓਹਨਾਂ ਦਿਆਂ ਤਸ਼ਤਰੀਆਂ D_1 ਅਤੇ D_2 ਦੇ ਇੰਟਰਸੈਕਸ਼ਨ $D_1 \cap D_2$ ਦੇ ਅੰਦਰ ਹੈ ਅਤੇ {P, Q, R, S} ਵਿਚੋਂ ਜ਼ਰੂਰ ਇਕ ਸਿਰਾ – ਸ਼ਾਇਦ ਦੋ ਯਾਂ ਤਿਨ ਵੀ, ਪਰ ਚਾਰੋਂ ਕੱਦੇ ਨਹੀਂ – $D_1 \cap D_2$ ਦੀ ਬਾਉਂਡਰੀ ਉੱਤੇ ਹੈ। ਇਹ ਇਸ ਲਈ ਕਿ ਚੱਤਰਭੁਜ PQRS ਦੇ ਚਾਰ ਐਂਗਲਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਹੈ ੩੬੦ ਸੋ ਸਾਰੇ ੯੦ ਤੋਂ ਘਟ ਨਹੀਂ। ਆਪਾਂ ਕੱਟ ਖ਼ਾਰਿਜ ਕਰਾਂਗੇ ਐਸੇ ਸਿਰੇ ਉੱਤੋਂ ਉਂਗਲ਼ ਜ਼ਰੀਏ। ਵਧੇਰੇ ਜੋੜੇਆਂ ਲਈ ਉਂਗਲਾਂ ਜਲਦ ਤਬਦੀਲ ਕਰ ਦੇਨ ਗਿਆਂ ਸੈਗਮੈਂਟਸ ਨੂੰ ਆਰਕਾਂ ਵਿਚ। ਸੋ ਸਵਾਲ ਉਠਦਾ ਹੈ ਕਿ ਕੀ ਆਪਾਂ ਐਸਾ ਹੀ ਕੁਝ ਕਰ ਸੱਕਦੇ ਹਾਂ ਦੋ ਆਰਕਸ PR ਅਤੇ QS ਲਈ ਜੋ ਫ਼ੇਰ ਸਿਰੇਆਂ ਨੂੰ ਛੱਡ D_1 ਅਤੇ D_2 ਅੰਦਰ ਹਨ? ਜੇ ਓਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਸਿਰਫ਼ ਇਕ ਆਰ ਪਾਰ ਦਾ ਕਟ ਹੈ ਤਾਂ ਲਾਜ਼ਮੀ ਹੈ ਕਿ ਦੋਆਂ ਵਿਚੋਂ ਇਕ ਕਟ ਤੋਂ ਲੈ ਕੇ ਇਕ ਸਿਰੇ ਤਕ ਸਾਰੀ $D_1 \cap D_2$ ਅੰਦਰ ਹੈ। ਇਹ ਇਸ ਲਈ ਕਿ ਜੇ ਸਮਝ ਲੋ ਦੂਜੀ ਕਟ ਦੇ ਦੋਨੋਂ ਪਾਸੇ $D_2 \backslash D_1$ ਵਿਚ ਵੜ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਓਹ ਪਹਲੀ ਆਰਕ ਦੇ ਇਕ

ਸਿਰੇ ਨੂੰ $D_1 \setminus D_2$ ਨਾਲੋਂ ਅਲੱਗ ਕਰ ਦਿੰਦੀ ਹੈ। ਹੁਣ ਆਪਾਂ ਇਕ ਟੇਡੀ ਉਂਗਲੀ ਨਾਲ ਕਟ ਨੂੰ ਖ਼ਾਰਿਜ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਇਸ ਤਰਹਾਂ ਕਿ ਨੰਵੀ ਦੂਜੀ ਆਰਕ ਵੀ D_2 ਵਿਚ ਹੈ। ਜੇ ਜ਼ਿਆਦਾ ਕਟ ਹਨ ਤਾਂ $D_1 \cap D_2$ ਵਿਚ ਇਹਨਾਂ ਦੋ ਆਰਕਸ ਦਿਆਂ ਬਨਾਇਆਂ ਕੁਝ ਲੂਪਸ ਵੀ ਹੋ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ। ਹੁਨ ਆਪਾਂ ਦੂਸਰੀ ਆਰਕ ਦਾ ਰਸਤਾ ਪਹਲੀ ਆਰਕ ਨਾਲ ਚਲਾ ਕੇ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਲਾਂ ਇਹ ਸਾਰਿਆਂ ਲੂਪਸ ਨੂੰ ਖ਼ਾਰਿਜ ਕਰਾਂਗੇ। ਇਸ ਤੋਂ ਬਾਦ ਫ਼ੇਰ ਓਹ ਹੀ ਦਲੀਲ ਸਹੀ ਹੈ ਹਰ ਬਚੇ ਹੋਏ ਕਟ ਦੇ ਲਈ। ਸੋ ਠੀਕ ਉਂਗਲਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਨਾਲ ਆਹ ਕਟ ਵੀ ਕੱਡੇ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਆਪਾਂ ਦੋ ਜੋੜੇਆਂ ਲਈ ਹੇਠਲਿਖ਼ਤ ਨਤੀਜਾ ਵੀ ਸਿੱਧ ਕਰ ਦਿਤਾ ਹੈ।

(ਅ) ਅਗਰ ਓਹ ਚੱਕਰ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇ ਵਿਰੋਧੀ ਪੋਇੰਟ ਹਨ ਅਤੇ ਓਹਨਾਂ ਨੂੰ ਇਹਨਾਂ ਅੰਦਰ ਜੋੜਦੀਆਂ ਕੋਈ ਆਰਕਸ ਦੋ ਦੋ ਅਤੇ ਆਰ ਪਾਰ ਹੀ ਕਟਦੇ ਹਨ ਤਾਂ ਆਰਕਸ ਦੇ ਸਾਰੇ ਕੱਟ ਇੰਜ ਖ਼ਾਰਿਜ ਕੀਤੇ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ ਕਿ ਨੰਵੀਆਂ ਡਿਸਜੋਇੰਟ ਆਰਕਸ ਵੀ ਸਿਰੇਆਂ ਨੂੰ ਛੱਡ ਇਹ ਚੱਕਰਾਂ ਦੇ ਅੰਦਰ ਹੀ ਹਨ ਅਤੇ ਦਿੱਤੀਆਂ ਆਰਕਸ ਦੇ ਯੁਨੀਅਨ ਦੇ ਅੱਤ ਕਰੀਬ ਹਨ।

ਇੰਡੱਕਟਿਵਲੀ ਮੰਨ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਕੇ $n-1$ ਆਰਕਸ ਡਿਸਜੋਇੰਟ ਹਨ ਅਤੇ ਪਹਲਾਂ ਓਹਨਾਂ ਦੇ nਥ ਲਾਲ ਆਰਕ ਉੱਤੇ ਓਹ ਕਟ ਖ਼ਾਰਿਜ ਕਰਾਂਗੇ ਜੋ ਇਹਨੂੰ ਹਲਾ ਕੇ ਕੱਡੇ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਯਾਂਨੀ ਕਿ ਪਹਲਾਂ ਅਗਰ ਕਿਸੀ ਵੀ $D_i \cap D_n$ ਵਿਚ ਇਹ ਦੋ ਆਰਕਸ ਦੇ ਬਨਾਏ ਲੂਪਸ ਹਨ ਤਾਂ ਲਾਲ ਦਾ ਵਾਹ ਬਦਲ ਕੇ ਇਹ ਸਾਰੇ ਗੁੱਲ ਕਰਾਂਗੇ। ਫ਼ੇਰ ਅਗਰ ਕਿਸੀ ਕਟ ਤੋਂ ਆਪਨੇ ਇਕ ਸਿਰੇ ਤਕ ਕੋਈ ਪੁਰਾਨੀ ਆਰਕ ਸਾਰੀ D_n ਵਿਚ ਹੈ ਤਾਂ ਇਕ ਲਾਲ ਉਂਗਲੀ ਇਹਨੂੰ ਸੋਧ ਦਊ। ਹੁਨ ਸਥਿਤੀ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਬਚੇ ਹਰ ਕਟ ਦੇ ਦੋਨੋਂ ਪਾਸੇ ਪੁਰਾਨੀ ਆਰਕ ਆਪਨੇ $D_i \setminus D_n$ ਵਿਚ ਵੜ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਸੋ ਇਸ ਕਟ ਨੂੰ ਕੱਡਣ ਲਈ ਇਸ ਪੁਰਾਨੀ ਆਰਕ ਉੱਤੇ ਇਕ ਉਂਗਲ ਲਗਾਈ ਜਾਏਗੀ ਕਦੇ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਖੱਬੇ ਨੂੰ ਲਾਲ ਆਰਕ ਦੇ ਸਿਰੇ L ਉੱਤੋਂ ਅਤੇ ਕਦੇ ਸੱਜੇ ਨੂੰ ਸਿਰੇ R ਦੇ ਉੱਤੋਂ।



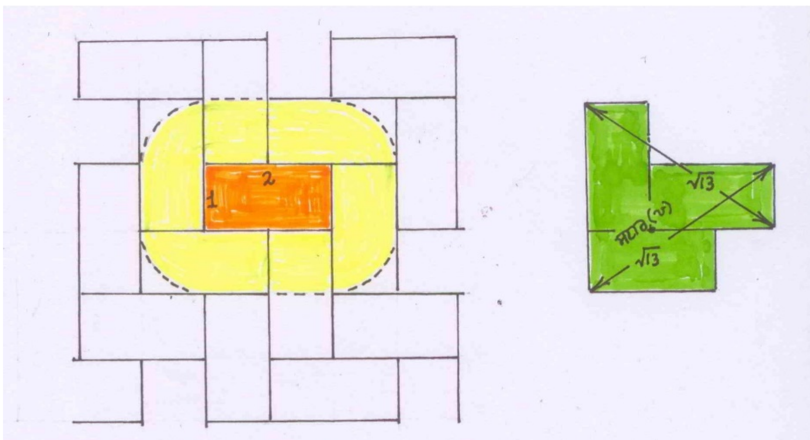
ਹਰ ਪੁਰਾਣੀ ਆਰਕ ਦੇ ਕੱਟਾਂ ਲਈ ਤਾਂ ਕੁਝ ਦੂਰੀ ਤਕ ਸਾਰੀਆਂ ਉਂਗਲਾ ਖੱਬੇ ਨੂੰ ਅਤੇ ਬਾਕੀ ਸੱਜੇ ਨੂੰ ਚਲਾਇਆਂ ਜਾ ਸਕਦੀਆਂ ਸਨ। ਪਰ ਦੋ ਪੁਰਾਨੀ ਆਰਕਸ ਵਿਚ ਫ਼ੇਰ ਕਟ ਪੈਦਾ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਪਰ ਇਹ ਸਾਰੀਆਂ ਦਾ ਯੁਨੀਅਣ ਹੁਨ ਲਾਲ ਆਰਕ ਤੋਂ ਡਿਸਜੋਇੰਟ ਹੋ ਗਿਆ ਹੈ। ਸੋ ਇਸ ਯੁਨੀਅਣ ਦਾ ਇਕ ਗੁਆਂਡ ਆਪਾਂ ਏਣਾ ਛੋਟਾ ਲੇ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਲਾਲ ਆਰਕ ਉਸ ਵਿਚ ਨਹੀਂ। ਇਕ ਵਾਰ ਫਿਰ ਆਪਾਂ ਇੰਡੱਕਟਿਵ ਦਾਵੇ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਨਾਲ ਇਹ $n-1$ ਆਰਕਸ ਦੇ ਆਹ ਨੰਵੇ ਨਰੋਏ ਕਟਸ ਵੀ ਖ਼ਾਰਿਜ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਇਸ ਤਰਹਾਂ ਕਿ ਨੰਵੀਆਂ ਡਿਸਜੋਇੰਟ ਆਰਕਸ ਇਸ ਛੋਟੇ ਗੁਆਂਡ ਵਿਚ ਰਹਨ। ਕਿਊ ਈ ਡੀ।

ਨੋਟ

(੧) ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਥੀਓਰਮ ਸਮੇਲ ਅਤੇ ਸ਼ੁਬ ਦੇ ੧੯੭੨ ਦੇ ਐਨਲਜ਼ ਓਫ਼ ਮੈਥ ਵਿਚ ਛਪੇ ਕੰਮ ਨਾਲ ਜੁੜੀ ਹੈ ਪਰ ਇਕ ਪਰੂਫ਼ ਜੋ ੧੯੭੧ ਦੇ ਬਰਕਲੀ ਸੈਮੀਨਾਰ ਵਿਚ ਇਹਦਾ ਪੇਸ਼ ਕਿਤਾ ਗਿਆ ਓਹ ਗ਼ਲੱਤ ਸੀ। ਇਹ ਮੋਕੇ ਓੱਤੇ ਹੀ ਥੱਰਸਟਨ ਨੇ ਇਕ ਹਰਾਣੀਜਣਕ ਚਿੱਤਰ ਵਾਹ ਕੇ ਵਿਖਾ ਦਿਤਾ! ਸੱਲੀਵਨ ਜੋ ਹਾਜ਼ਰ ਸੀ ਦੇ ਬਦੌਲਤ ਇਹ ਕਹਾਣੀ ਆਮ ਹੋ ਗਈ ਅੱਤੇ ੨੦੧੪ ਵਿਚ ਕੈਲੀਗਰੀ ਦਾ ਇਕ ਬਲੌਗ ਲੇਖ ਬਣ ਗਈ। ਕਹਾਨੀ ਤਾਂ ਮੈਂ ਏਥੋਂ ਪੜ ਲਈ ਪਰ ਇਕ ਪਰੂਫ਼ ਛੱਡ ਦਿੱਤਾ ਕਿਉਂਕਿ ਮੈਂ ਇਸ ਮਨਮੋਹਕ ਪਹੇਲੀ ਦਾ ਪੂਰਾ ਆਨੰਦ ਲੈਣਾ ਚਾਂਹਦਾ ਸੀ। ਫ਼ਲਸਰੂਪ ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੇ ਸਭ ਪਰੂਫ਼ ਮੇਰੇ ਆਪਣੇ ਲੱਭੇ ਹੀ ਹਨ।

(੨) ਇਹ ਪੱਕਾ ਨਹੀਂ ਕਿ ਥੀਓਰਮ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਲਾਂ ਕਿਸ ਨੇ ਸਹੀ ਸਿਧ ਕੀਤੀ ਸੀ ਪਰ ਐਡਵਰਡਜ਼ ਉੱਤੇ ਸ਼ਕ ਹੈ। ਐਨੀਵੇ ੧੯੭੧ ਵਿਚ ਹੀ ਬਰਾਏਅੰਟ ਨੇ ਇਸ ਪਹੇਲੀ ਨੂੰ ਅਮਰੀਕਣ ਮੈਥ ਮੰਥਲੀ ਦਾ ਸਵਾਲ ਨੰਬਰ ੫੭੮੭ ਬਣਾ ਦਿੱਤਾ ਸੀ। ਇਸ ਪ੍ਰਸ਼ਣ ਵਿਚ $\sqrt{13}$ ਦੀ ਮੌਜੂਦਗੀ ਸੰਕੇਤ ਕਰਦੀ ਹੈ ਕਿ ਓਹਨੂੰ ਸ਼ਾਇਦ ਮੇਰੇ ਦੁਜੇ ਪਰੂਫ਼ ਦਾ ਪਤਾ ਸੀ। ਅਤੇ ਮੈਂ ਹੁਣ ਵੇਖਦਾਂ ਹਾਂ ਕਿ ਕੈਲੀਗਰੀ ਦੇ ਬਲੌਗ ਵਿਚ ਛੱਪੇਆ ਕਮ ਚਲਾਊ ਪਰੂਫ਼ ਵੀ ਹੈਕਸਾਗਨਲ ਟਾਈਲਿੰਗ ਤੋਂ ਹੀ ਸ਼ੁਰੂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਪਰ ਅੰਤ ਕੁਝ ਹੋਰ ਹੱਥੀਆਰਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਦੇ ਬਾਵਜੂਦ ਬਹੁਤ ਹੀ ਵੱਡਾ ਸਥਿਰ ਅੰਕ **42** ਮੰਗਦਾ ਹੈ।

(੩) ਪਰ ਇਹ ਵੀ ਸੰਭਵ ਹੈ ਕਿ ਬਰਾਏਅੰਟ ਦੇ $\sqrt{13}$ ਦਾ ਇਸ਼ਾਰਾ ਸਕਵੇਅਰ ਟਾਈਲਿੰਗ ਵਲ ਸੀ! ਹਾਂ ਹੁਣ ਹਰ ਵਰਟੈਕਸ ਉੱਤੇ ਤਿਨ ਨਹੀਂ ਚਾਰ ਟਾਈਲਾਂ ਹਨ ਪਰ ਦੋ ਦੋ ਨੂੰ ਜੋੜ ਕੇ ਆਪਾਂ ਬਣਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਇਕ ਇੱਟਾਂ ਦੀ ਚੁਣਾਈ ਜੋ ਦਿੰਦੀ ਹੈ ਆਪਾਂ ਨੂੰ ਆਹ ਚੌਥਾ ਪਰੂਫ਼ (ਸਾਧਾਰਨ ਇੱਟਾਂ ਦੀ ਚੁਣਾਈ ਵੀ ਕੰਮ ਕਰਦੀ ਹੈ ਪਰ ਮੰਗਦੀ ਹੈ ਕੁੱਝ ਵੱਡਾ ਅੰਕ $\sqrt{17}$) :-



(੪) ਮੰਥਲੀ ਨੇ ੧੯੭੨ ਵਿਚ ਛਾਪੇਆ ਸੀ ਸਿਰਫ਼ ਉਂਗਾਰ ਦਾ ਜਵਾਬ ਜੋ ਮੇਰੇ ਪਹਲੇ ਪਰੂਫ਼ ਵਰਗਾ ਹੈ ਪਰ ਬਹੁਤ ਹੀ ਜ਼ਿਆਦੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿਚ। ਅੱਗੇ ਇਕ ਸੰਪਾਦਕੀ ਨੋਟ ਦੱਸਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇਸੇ ਵਿਧੀ ਦੇ ਕਾਫ਼ੀ ਹੋਰ ਵਿਸਤਾਰ ਨਾਲ ਉਂਗਾਰ ਨੇ ਹੁਣ ਸਿਧ ਕਰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ ਕੋਈ $\alpha > 1$ ਕੰਮ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਪਰ ਇਸ ਦਾਅਵੇ ਦਾ ਸਬੂਤ ਵੀ ਸ਼ਾਇਦ ਪਹਲੀ ਵਾਰ ਇਸੇ ਪਰਚੇ ਵਿਚ ਹੀ ਛਪ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਅਤੇ ਇਸ ਨਤੀਜੇ ਨੂੰ ਹੱਥਾਓਣ ਲਈ ਆਪਾਂ ਓਹ ਤਗੜੀ ਥੀਓਰਮ (ਅ) ਵੀ ਹਾਸਿਲ ਕਰ ਲੀਤੀ ਹੈ।

(੫) ਥੀਓਰਮ (ਅ) ਓਦੋਂ ਵੀ ਸਹੀ ਹੈ ਜੇ ਆਪਾਂ ਯੂਕਲਿਡ ਦੀ ਜਿਓਮੈਟਰੀ ਦੀ ਜਗਹ ਓਹ ਫ਼ਾਨਾਇਟ ਰੇਡੀਅਸ **c** ਵਾਲਾ ਰੇਖਾ ਗਣਿਤ ਵਰਤੀਏ – ਦੇਖੋ ਮੇਰਾ ਚਲਦਾ ਪਰਚਾ ਪਲੇਨ ਜਿਓਮੈਟਰੀ ਐਂਡ ਰੈਲਿਟੀਵੀਟੀ – ਜਿਸ ਵਿਚ ਕੈਇਲੀ ਡਿਸਟੈਂਸ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਹ ਇਸ ਲਈ ਕਿ ਹੁਣ ਇਕ ਪੋਇੰਟ ਤੋਂ ਮਿੱਥੇ ਡਿਸਟੈਂਸ ਉੱਤੇ ਪੋਇੰਟ ਬਨਾਂਦੇ ਹਨ ਇਲੀਪਸ ਪਰ ਜੀਨੀਰਕਲੀ ਇਹ ਇਲੀਪਸ ਵੀ ਅਗਰ ਇਕ ਦੂਜੇ ਨੂੰ ਕਟਦੇ ਹਨ ਤਾਂ ਦੋ ਬਾਰ ਅਤੇ ਆਰ ਪਾਰ। ਆਹ ਹੀ ਧੁਰਾ ਸੀ ਤੀਜੇ ਪਰੂਫ਼ ਦਿਆਂ ਸਭ ਦਲੀਲਾਂ ਦਾ ਸੋ ਇਹ ਸਭ ਕੁਝ ਵਾਜਿਬ ਹੈ ਕਿਸੀ ਵੀ ਮੀਟਰਿਕ ਲਈ ਜਿਹਦੇ 'ਸਰਕਲ' ਐਸੇ ਹਨ।

(੬) ਦੂਜੇ ਪਰੂਫ਼ ਨੂੰ ਜੇ ਆਪਾਂ ਇਕ ਡਿਸਕਰੀਟ ਯਾਂ ਕਵਾਂਟਮ ਅੱਖ ਨਾਲ ਵੇਖੀਏ ਤਾਂ ਇਹ ਵੀ 'ਬੈਸਟ ਪੌਸੀਬਲ' ਹੈ! ਪਲੇਨ ਦੀ ਉਪਰਲੀ ਕੰਟੀਨੀਉਟੀ ਮਿੱਥ ਹੈ ਐਸੀ ਅੱਖ ਲਈ ਅਤੇ ਹੈਕਸਾਗਨਲ ਟਾਈਲਿੰਗ ਅਨਸਰਟੈਨਿਟੀ ਦਾ ਇਕ ਪੈਮਾਣਾ। ਹਰ ਪਾਰਟੀਕਲ ਦਾ ਹਾਣੀ ਯਾਂ ਤਾਂ ਉਸੀ ਟਾਈਲ ਵਿਚ ਹੈ ਯਾਂ ਫ਼ੇਰ ਇਕ ਗਵਾਂਡਣ ਵਿਚ ਤੇ ਆਪਾਂ ਸਿਧ ਕਰ ਦਿਤਾ ਹੈ ਕਿ ਓਹਨਾਂ ਦਾ ਇੰਡੀਪੈਂਡੇਂਟ ਇੰਟਰਐਕਸ਼ਨ – ਓਹ ਡਿਸਜੋਇੰਟ ਆਰਕਸ – ਵੀ ਆਹ ਦੋ ਟਾਈਲਾਂ ਅੰਦਰ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ।

(੭) ਅਤੇ ਇਹ ਪਰੂਫ਼ ਹੂ ਬ ਹੂ ਲਾਗੂ ਹੈ ਰੈਲੇਟਿਵਿਸਟਿਕ ਪਲੇਨ ਦਿਆਂ ਰੈਗੂਲਰ ਟਾਈਲਿੰਗਜ਼ $\{p,3\}$, $p \geq 7$ ਉੱਤੇ ...

ਕੇ ਐਸ ਸਰਕਾਰੀਆ

੨੯ ਜੁਲਾਈ ੨੦੧੫